Ispitna pitanja iz Matematike 1 2010/11

1. Definirajte relaciju implikacije pomoću tablica istinitosti. Objasnite na primjeru i dokažite formulu za negaciju implikacije $\urcorner(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \urcorner q$.

2. Definirajte i objasnite na primjeru pravila zaključivanja modus ponens i modus tollens.

3. Dokažite de'Morganovo pravilo:

(a) Za sudove $\urcorner(p \wedge q) \equiv \urcorner p \vee \urcorner q$;

(b) Za skupove $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Nacrtajte odgovarajući Veinneov dijagram.

4. Objasnite dokaz metodom suprotnog. Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan. Da li je broj $0.\dot{3}\dot{6}$ beskonačnog decimalnog zapisa racionalan ili iracionalan? Obrazložite odgovor.

5. Metodom matematičke indukcije dokažite:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N} .$$

6. Na koji način se grafički testira da li je neka krivulja (a)funkcija ; (b) bijekcija? Pokažite to na primjerima trigonometrijskih funkcija i objasnite definiciju arkus funkcija.

7. Definirajte pojam niza i limesa niza. Na primjeru niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = \frac{n}{n+1}$ objasnite $(\varepsilon - n_0)$ −definiciju limesa niza za $\varepsilon_1 = 0.001$ i $\varepsilon_2 = 10^{-5}$. Dokažite da je $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$.

8. Napišite iskaz teorema o limesu sume, produkta i kvocijenta dva konvergentna niza. Dokažite jednu od navedenih tvrdnji i izračunajte $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3n-1}{n^2} - \frac{1-3n}{n+1} \right) \cdot \sqrt[n]{n}$.

9. Definirajte gomilište niza. Odredite limes i/ili gomilište nizova:

(a) $a_n = \frac{sinn}{n}$; (b) $a_n = cos(n\pi) + \frac{1}{n}$.

10. Grafički objasnite da (a) svaki ograničeni niz ima barem jedno gomilište.
    (b) da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

11. Što je supremum nekog podskupa od $\mathbb{R}$. Dokažite da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

12. Dokažite Bernoullijevu nejednakost. Dokažite da je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

13. Definirajte pojam limesa funkcije ($(\varepsilon - \delta) - definiciju$). Odredite limes funkcije $\mathrm{L} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$, te za dani $\varepsilon = 0.1$ nađite odgovarajući parametar $\delta > 0$ tako da bude ispunjen uvjet iz definicije limesa funkcije. Dokažite da je $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1} = 1.$

14. Napišite iskaz teorema o osnovnim aritmetičkim operacijama s limesom funkcije, o limesu sume, produkta i kvocijenta funkcija. Dokažite jednu od navedenih tvrdnji.

15. Definirajte i objasnite neprekidnost funkcije. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2+x}$ i njenog proširenja po neprekidnosti $\hat{f}(x)$.

16. Odredite $\lim_{x\to 0} g\left(\frac{sinx}{x}\right)$ ako je (a) $g(x) = e^x$ (b) $g(x) = \begin{cases} x & ;\ ako\ je\ x < 1 \\ x-1; & ako\ je\ x \geq 1 \end{cases}$. Uz koje uvjete vrijedi: $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$?

17. Objasnite definiciju derivacije preko problema tangente. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = sinx$ u točki $x_0 = \frac{\pi}{3}$ po definiciji i napišite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

18. Dokažite po definiciji derivacije funkcije da je $(e^x)' = e^x$.

19. Dokažite da je svaka derivabina funkcija u točki neprekidna u točki. Da li vrijedi obrat tvrdnje? Potkrijepite vaš odgovor primjerom.

20. Dokažite teorem o derivaciji sume, umnoška i produkta funkcija. Izračunajte:
    (a) $(x^{-n})'$ (b) $(tgx)'$.

21. Dokažite teorem o derivaciji kompozicije funkcija. Ako je $f(x) = \alpha \cdot lnx$, $g(x) = e^x$ izračunajte $(x^\alpha)'$ kao derivaciju kompozicije $g\big(f(x)\big)$.

22. Izvedite izraz za derivaciju inverzne funkcije. Izračunajte $(arcsinx)'$.

23. Na primjeru pokažite kako se ispituju intervali monotonosti i određuju lokalni ekstremi funkcije pomoću derivacija. Grafički objasnite vezu između rasta i pada funkcije i derivacije.

24. Grafički objasnite i dokažite Fermatov teorem. Da li Fermatov teorem daje dovoljne uvjete za lokalne ekstreme. Objasnite na primjeru.

25. Grafički objasnite ispitivanje intervala zakrivljenosti i određivanje točaka infleksije pomoću druge derivacije. Opišite postupak na primjeru.

26. Dokažite najjednostavniju varijantu L'Hospitalovg pravila i navedite primjer u kojem se koristi.