Ispitna pitanja iz Matematike 1 2013/14

1. Dokažite de'Morganovo pravilo:

(a) Za sudove $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$;

(b) Za skupove $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Nacrtajte odgovarajući Veinneov dijagram.

2. Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan.

3. Metodom matematičke indukcije dokažite:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Objasnite vertikalni i horizontalni test. Objasnite definiciju funkcije $f(x) = arcsinx$. Nacrtajte graf.

5. Definirajte pojam niza i limesa niza. Na primjeru niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ objasnite $(\varepsilon - n_0) -$ definiciju limesa niza za $\varepsilon_1 = 0.1$ i $\varepsilon_2 = 10^{-5}$. Dokažite da je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

6. Definirajte gomilište niza. Odredite limes i/ili gomilište nizova:

   (a) $a_n = \frac{sinn}{n}$; (b) $a_n = cos(n\pi) + \frac{1}{n}$.

7. Grafički objasnite da (a) svaki ograničeni niz ima barem jedno gomilište.
   (b) da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

8. Što je supremum nekog podskupa od $\mathbb{R}$? Dokažite da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

9. Dokažite da kvocijent dva uzastopna člana Fibonaccijevog niza konvergira prema omjeru zlatnog reza.

10. Definirajte pojam limesa funkcije $((\varepsilon - \delta) - definiciju)$. Odredite limes funkcije $L = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$, te za dani $\varepsilon = 0.1$ nađite odgovarajući parametar $\delta > 0$ tako da bude ispunjen uvjet iz definicije limesa funkcije. Dokažite da je $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

11. Definirajte i objasnite neprekidnost funkcije. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2+x}$ i njenog proširenja po neprekidnosti $\hat{f}(x)$.

12. Odredite $\lim_{x\to 0} g\left(\frac{sinx}{x}\right)$ ako je (a) $g(x) = e^x$ (b) $g(x) = \begin{cases} x & ; ako\ je\ x < 1 \\ x-1; & ako\ je\ x \geq 1 \end{cases}$.

Uz koje uvjete vrijedi: $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$?

13. Objasnite definiciju derivacije preko problema tangente. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ u točki $x_0 = 1$ po definiciji i napišite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $P(1,1)$.

14. Objasnite pojam derivacije preko brzine materijalnog tijela.

15. Dokažite po definiciji derivacije funkcije da je $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

16. Dokažite da je svaka derivabina funkcija u točki neprekidna u toj točki. Da li vrijedi obrat tvrdnje? Navedite kontraprimjer.

17. Dokažite teorem o derivaciji produkta.

18. Dokažite teorem o derivaciji kompozicije funkcija. Ako je $f(x) = \alpha \cdot lnx$, $g(x) = e^x$ izračunajte $(x^\alpha)'$ kao derivaciju kompozicije $g(f(x))$.

19. Dokažite izraz za derivaciju inverzne funkcije. Izračunajte $(arccosx)'$.

20. Na primjeru pokažite kako se ispituju intervali monotonosti i određuju lokalni ekstremi funkcije pomoću derivacija. Grafički objasnite vezu između rasta i pada funkcije i derivacije.

21. Grafički objasnite i dokažite Fermatov teorem. Daje li Fermatov teorem dovoljne uvjete za lokalne ekstreme?

22. Grafički objasnite uvjete za lokalne ekstreme pomoću drugih derivacija.

23. Grafički objasnite ispitivanje intervala zakrivljenosti i određivanje točaka infleksije pomoću druge derivacije.

24. Dokažite najjednostavniju varijantu L'Hospitalovg pravila.