Ispitna pitanja iz Matematike 1 2012/13

1. Dokažite de'Morganovo pravilo:

(a) Za sudove $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$;

(b) Za skupove $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. Nacrtajte odgovarajući Veinneov dijagram.

2. Objasnite dokaz metodom suprotnog. Dokažite da je $\sqrt{2}$ iracionalan. Da li je broj $0.\dot{3}$ beskonačnog decimalnog zapisa racionalan ili iracionalan? Obrazložite odgovor.

3. Metodom matematičke indukcije dokažite:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

4. Na koji način se grafički testira da li je neka krivulja (a) funkcija ; (b) bijekcija? Pokažite to na primjerima trigonometrijskih funkcija i objasnite definiciju arkus funkcija.

5. Definirajte pojam niza i limesa niza. Na primjeru niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$ objasnite $(\varepsilon - n_0)$ −definiciju limesa niza za $\varepsilon_1 = 0.001$ i $\varepsilon_2 = 10^{-5}$. Dokažite da je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

6. Definirajte gomilište niza. Odredite limes i/ili gomilište nizova:

   (a) $a_n = \frac{sinn}{n}$; (b) $a_n = cos(n\pi) + \frac{1}{n}$.

7. Grafički objasnite da (a) svaki ograničeni niz ima barem jedno gomilište.
   (b) da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

8. Što je supremum nekog podskupa od $\mathbb{R}$? Dokažite da je svaki rastući odozgo ograničeni niz konvergentan.

9. Dokažite Bernoullijevu nejednakost. Dokažite da je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$.

10. Dokažite da kvocijent dva uzastopna člana Fibonaccijevog niza konvergira prema omjeru zlatnog reza.

11. Definirajte pojam limesa funkcije ($(\varepsilon - \delta) - definiciju$). Odredite limes funkcije $\mathrm{L} = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$, te za dani $\varepsilon = 0.1$ nađite odgovarajući parametar $\delta > 0$ tako da bude ispunjen uvjet iz definicije limesa funkcije. Dokažite da je $\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

12. Definirajte i objasnite neprekidnost funkcije. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{x^2+x}$ i njenog proširenja po neprekidnosti $\hat{f}(x)$.

13. Odredite $\lim_{x\to 0} g\left(\frac{sinx}{x}\right)$ ako je (a) $g(x) = e^x$ (b) $g(x) = \begin{cases} x & ;\ ako\ je\ x < 1 \\ x-1; & ako\ je\ x \geq 1 \end{cases}$.

    Uz koje uvjete vrijedi: $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$?

14. Objasnite definiciju derivacije preko problema tangente. Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = x^2$ u točki $x_0 = 1$ po definiciji i napišite jednadžbu tangente na graf te funkcije u točki $P(1,1)$.

15. Objasnite pojam derivacije preko brzine materijalnog tijela.

16. Dokažite po definiciji derivacije funkcije da je $(sinx)' = cosx$.

17. Dokažite da je svaka derivabina funkcija u točki neprekidna u točki. Da li vrijedi obrat tvrdnje? Potkrijepite vaš odgovor primjerom.

18. Dokažite teorem o derivaciji sume, umnoška i produkta funkcija. Izračunajte:
    (a) $(x^{-n})'$ (b) $(tgx)'$.

19. Dokažite teorem o derivaciji kompozicije funkcija. Ako je $f(x) = \alpha \cdot lnx$, $g(x) = e^x$ izračunajte $(x^\alpha)'$ kao derivaciju kompozicije $g\big(f(x)\big)$.

20. Izvedite izraz za derivaciju inverzne funkcije. Izračunajte $(arcsinx)'$.

21. Na primjeru pokažite kako se ispituju intervali monotonosti i određuju lokalni ekstremi funkcije pomoću derivacija. Grafički objasnite vezu između rasta i pada funkcije i derivacije.

22. Grafički objasnite i dokažite Fermatov teorem. Daje li Fermatov teorem dovoljne uvjete za lokalne ekstreme? Objasnite na primjeru.

23. Grafički objasnite uvjete za lokalne ekstreme pomoću drugih derivacija.

24. Grafički objasnite ispitivanje intervala zakrivljenosti i određivanje točaka infleksije pomoću druge derivacije. Opišite postupak na primjeru.

25. Dokažite najjednostavniju varijantu L'Hospitalovg pravila i navedite primjer u kojem se koristi.