FUNKCIJE

SADRŽAJ

POJAM FUNKCIJE

Funkcijama se opisuje utjecaj jedne skupine parametara ili samo jednog parametra na određeni rezultat. Pritom se ulazni parametri nazivaju nezavisnim varijablama dok je rezultat zavisna varijabla. Funkcije prikazuju odnos između nezavisnih varijabli i zavisne varijable. Primjenjuju se prilikom opisivanja pravilnosti kod utjecaja vrijednosti jedne skupine veličina na vrijednosti neke druge veličine. Primjerice, kvaliteta otiska ovisi o vrijednosti rastertonskog prirasta rasterskog elementa. U ovom slučaju radi se o funkciji čija je nezavisna varijabla rastertonski prirast dok je zavisna varijabla kvaliteta reprodukcije.

Funkcije se često zadaju formulama.

Primjer 1. Uobičajeno poimanje funkcije vezano je uz formule kojima se opisuju. Funkcija za izračunavanje volumena V kugle radijusa R zadana je kao:

$$V = V(R) = \frac{4}{3}R^3\pi$$

U prethodnoj formuli opisan je funkcijski odnos među varijablama R i V. ■

Primjer 2. Put h koji prevali tijelo koje slobodno pada ovisi o vremenu t. U fizici je utvrđeno da se radi o funkciji:

$$h(t) = \frac{gt^2}{2}, g = 9.81\, m/s^2$$

■

Funkcija može biti predočena i tablicom, što se vrlo često javlja u tehnologiji gdje se određene vrijednosti funkcije mogu dobiti mjerenjima.

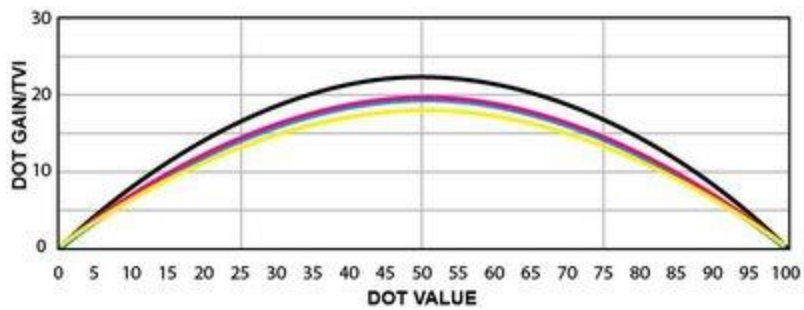
Primjer 3. Tablica prikazuje ovisnost sile potrebne za izvlačenje stranice papira iz knjižnog bloka, u ovisnosti o rednom broju stranice.

Redni broj stranice	Sila izvlačenja u Newtonima
1.	50
10.	40
30.	35
70.	45
100.	30
130.	38
160.	55

■

Funkcije se predočavju i grafički.

Primjer 4. Inženjeri grafičke tehnologije često trebaju interpretirati krivulju dot gaina kao funkciju u ovisnosti o vrijednosti dot value:



Ideja funkcije precizno je matematički opisana slijedećom definicijom.

Def. Funkcija $f: D \to K$ je preslikavanje koje svakom elementu iz domene D pridružuje jedinstveni element uz kodomene K. Prilikom zadavanja funkcije koriste se oznake:

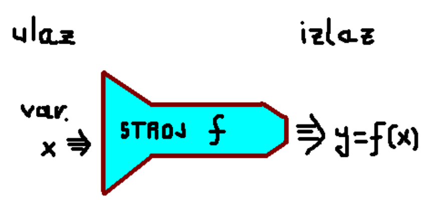
$$y = f(x)$$

ili

$$x \mapsto f(x).$$

Vrijednost varijable y se mijenja u ovisnosti o varijabli x pa se varijabla y naziva zavisnom varijablom. Varijabla x je nezavisna varijabla.

Funkcija $f: D \to K$ može se slikovito prikazatikao funkcijski stroj:

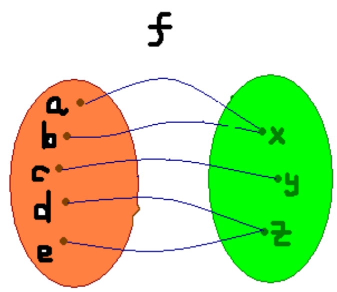


Sl.1. Funkcijski stroj $f(x)$

U stroj se ubaci nezavisna varijabla x iz domene funkcije i kao proizvod dobije zavisna varijabla y koja se nalazi u kodomeni funkcije.

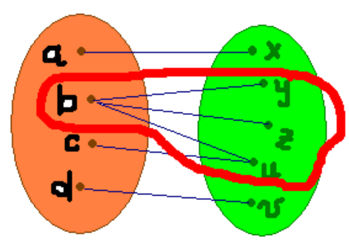
Primjer 5. Kalkulator je primjer funkcije shvaćene poput stroja. U kalkulator se ubaci neki broj x iz skupa svih pozitivnih realnih brojeva, pritisne tipka $\sqrt{*}$ i kao izlazna vrijednost dobije $\sqrt{x}$. Ukoliko je upisana varijabla $x < 0$ kalkulator će izbaciti oznaku error jer negativni brojevi nisu u domeni ove funkcije. ∎

Funkcija se može interpretirati i pomoću dijagrama.



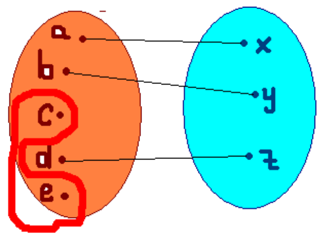
Sl.2. Preslikavanje je funkcija jer je ispunjen uvjet iz definicije funkcije jer je svakom elementu iz domene pridružen jedan i samo jedan element iz kodomene

Za razumijevanje pojma funkcije korisno je prikazati preslikavanja koja nisu funkcije. Slijedeći dijagram prikazuje preslikavanje koje nije funkcija jer nije ispunjen uvjet iz definicije funkcije.



Sl.3. Preslikavanje nije funkcija jer su elementu b pridružena tri različita elementa x, y, z

Definicija funkcije nalaže da se svakom elementu iz domene pridruži jedinstveni element iz kodomene pa gornji dijagram ne prikazuje funkciju.



Sl.4. Preslikavanje nije funkcija jer preslikavanje nije definirano za elemente c i d

Prethodni dijagram ne prikazuje funkciju jer nije ispunjen uvjet iz definicije funkcije da preslikavanje mora biti definirano za svaki element iz domene.

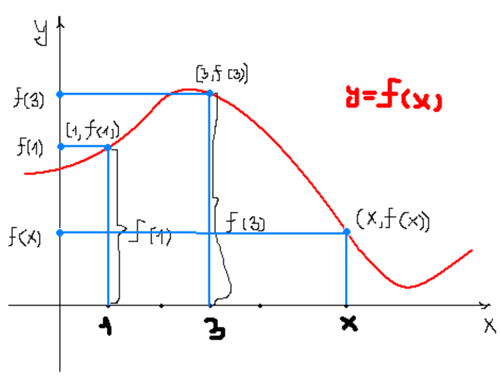
Funkcija se sastoji od domene D, kodomene K i zakona preslikavanja. Obzirom da funkcija može biti zadana tablično, grafički ili analitičkom formulom, određivanje domene i kodomene funkcije često je povezano s iskustvom inženjera koji radi s funkcijama.

Funkcija vrlo često može biti prikazana grafički što pomaže boljem razumijevanju njenih osnovnih obilježja. Iz grafičkog prikaza može se odrediti vrijednosti funkcije u pojedinim točkama, nul-točke, intervale rasta i pada funkcije, najveća i najmanja vrijednost funkcije i td. Graf omogućava vizualnu prezentaciju podataka opisanih funkcijom u zadanim uvjetima.

Def. Graf funkcije $f: D \to K$ je skup točaka u kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in D\}$$

Sa grafa funkcije može se pročitati vrijednosti funkcije u bilo kojoj točki domene:

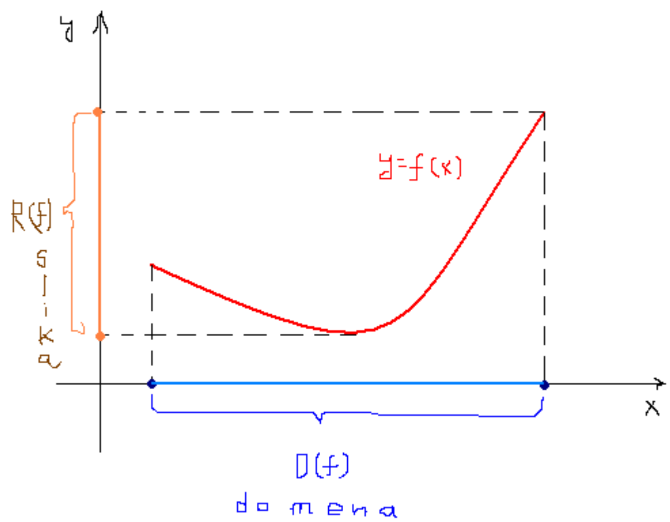


Sl.8. Vrijednosti funkcije u nekim točkama domene

Def. Slika funkcije $f: D \rightarrow K$ u oznaci $R(f)$ je skup svih vrijednosti koje može poprimiti funkcija:

$$R(f) = \{f(x): x \in D\}$$

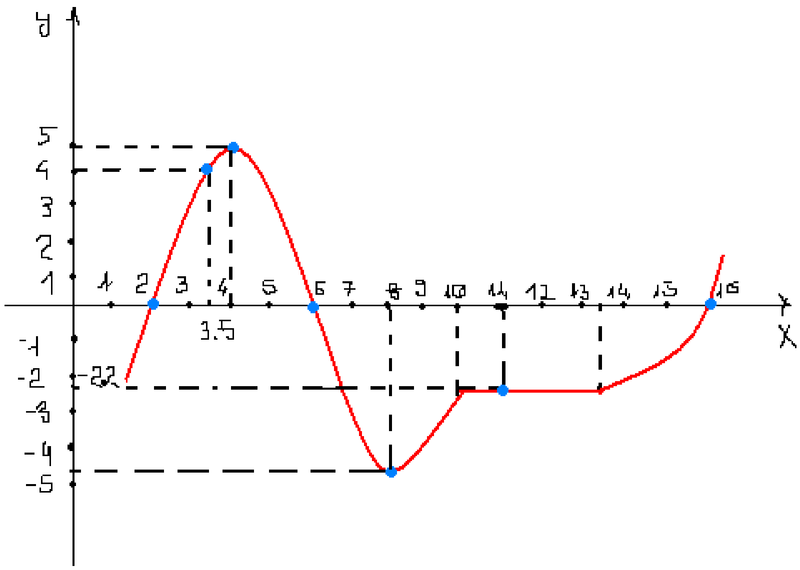
Slika funkcije je podskup kodomene $R(f) \subseteq K$. Kodomena je obično skup koji je širi od slike funkcije. U slijedećem grafičkom prikazu domena funkcije $f(x)$ se nalazi na osi$-x$ a slika funkcije na osi$-y$:



Sl.9. Grafički prikaz domene i slike funkcije

Primjer 6. Sa grafa funkcije $y = f(x)$ (Sl. 10) odrediti:

(a) Vrijednosti funkcije $f(3.5)$ i $f(14)$;
(b) Nul-točke funkcije $f(x)$;
(c) Intervale rasta i pada funkcije $f(x)$;
(d) Najveću i najmanju vrijednost funkcije;
(e) Područje na kojem je funkcija konstantna.



Sl.10. Graf funkcije $y = f(x)$

Rješenje: (a)

$$f(3.5) = 4, \qquad f(14) = -2.2$$

(b) Nul točke se nalaze na presjeku grafa funkcije $y = f(x)$ i osi$-x$:

$$x_1 = 2, x_2 = 6 \ i \ x_3 = 16$$

(c) Funkcija raste na intervalima $x \in [1,4] \cup [8,16]$ a pada na intervalu $x \in [4,8]$.

(d) Najveću vrijednost funkcija postiže u točki $x_{max} = 4$ pri čemu je vrijednost funkcije $y_{max} = f(x_{max}) = f(4) = 5$. Točka maksimuma je $Max(4,5)$. Minimum se nalazi u točki $x_{min} = 8$ za koju je $y_{min} = -5$ odnosno $min(8, -5)$.

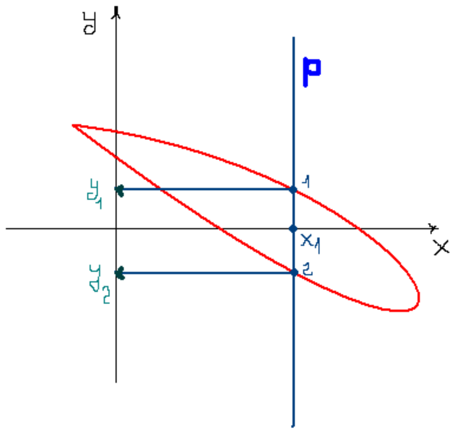
(e) Funkcija je konstantna $f(x) = -2.2$ na intervalu $x \in [10,14]$. ■

Sve krivulje u koordinatnom sustavu ne reprezentiraju funkciju. Da bi krivulja predstavljala funkciju mora biti ispunjen uvjet iz definicije funkcije koji nalaže da se svakom elementu iz domene pridruži jedinstveni element iz kodomene.

To je moguće provjeriti vertikalnim testom. Vertikalnim testom provjerava se je li svakom elementu x iz domene pridružena jedinstvena točka y iz kodomene. To će biti ispunjeno ako svaki pravac koji je okomit na os$-x$ siječe krivulju najviše u jednoj točki. Ako postoji pravac okomit na os$-x$ koji siječe krivulju u dvije ili više točaka, onda ta krivulja nije funkcija.

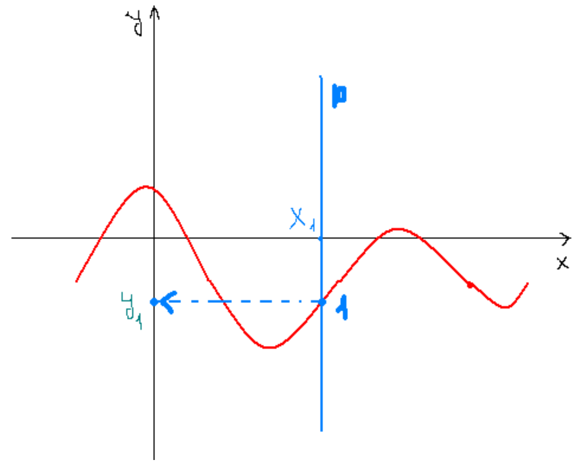
Primjer 7. Vertikalnim testom provjeriti koja od slijedećih krivulja predstavlja funkciju?

(a)



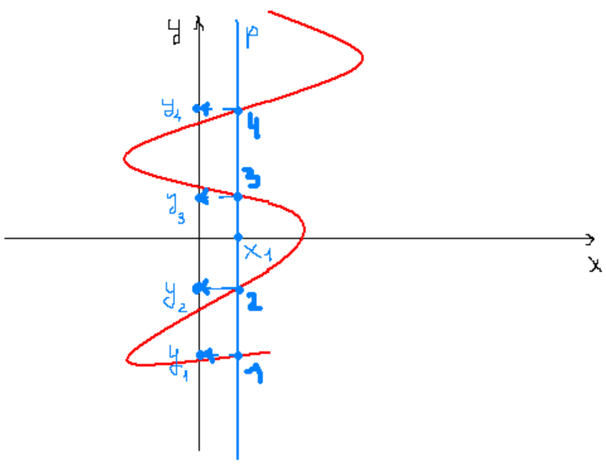
Sl. 12.

(b)



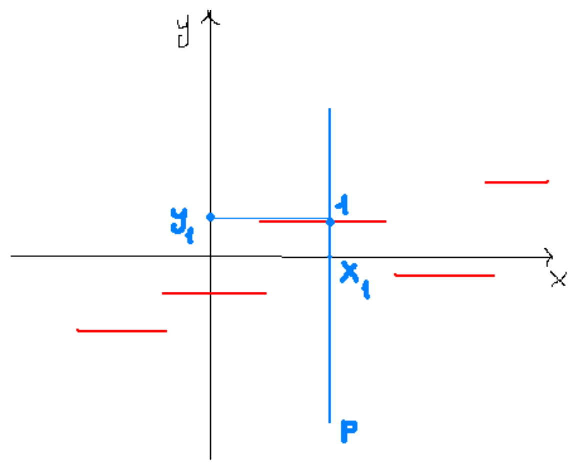
Sl. 13.

(c)



Sl. 14

(d)



Sl. 15

Rješenje: Vertikalni test pokazuje da su krivulje iz (b) i (d) dijela zadatka funkcije jer je svaki element x_1 iz domene preslikan u jedinstveni element y_1 iz kodomene.

Krivulje pod (a) i (c) nisu funkcije jer se radi o preslikavanjima koje elementu x_1 pridruže dva različita elementa iz kodomene ($y_{1,}y_2$ u slučaju (a)) ili četiri elementa (y_1, y_2, y_3, y_4 u slučaju (b)). ■

Funkcije se definiraju i analitičkim formulama koje mogu biti eksplicitne ili implicitne. Kod implicitnog zadavanja funkcije zavisna varijabla y nije „eksplicitno" zadana pomoću nezavisne varijable x. Eksplicitni oblik funkcije podrazumijeva direktno zadano pravilo pomoću kojega se varijabla y računa za zadane vrijednosti varijable x:

$$y = f(x)$$

Vrijednost varijable y za implicitno zadane funkcije se dobiva pomoću varijable x rješavanjem jednadžbe oblika:

$$F(x, y) = 0$$

Primjer 8. U primjeru je navedeno nekoliko implicitno i eksplicitno zadanih funkcija.

Eksplicitni oblik funkcije:	*Implicitni oblik funkcije:*
$y = 3x + 2$	$y - 3x - 2 = 0$
$y = x^2 - 2x$	$y - x^2 + 2x = 0$
$y = \sqrt[3]{x^3 - 1}$	$y^3 - x^3 + 1 = 0$

Primjer 9. Za danu eksplicitno zadanu funkciju

$$f(x) = log_2\left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right)$$

izračunati vrijednost u točki $x = 8$.

Rješenje:

$$f(8) = log_2\left(\sqrt[3]{8^2} + 1\right) = log_2 5$$

■

Primjer 10. Za implicitno zadanu funkciju

$$e^{xy} + x - 2 = 0$$

izračunati vrijednost $y(1)$.

Rješenje: Uvrsti li se $x = 1$ u gornju jednadžbu dobije se relacija oblika:

$$e^y + 1 - 2 = 0$$

odakle slijedi da je $y = 0$. Vrijednost zadane funkcije u točki $x = 1$ iznosi $y(1) = 0$. ■

Funkcije mogu biti zadane po dijelovima.

Primjer 11. Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x < 1 \\ 2x - 1, 1 \leq x < 3 \\ \dfrac{2x-1}{4-x}, 3 \leq x, x \neq 4 \end{cases}$$

Izračunati vrijednosti funkcije u točkama $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_3 = 5$.

Rješenje: $x_1 = 0 < 1$ pa se $f(0)$ računa po formuli $f(0) = 0^2 = 0$. Točka $x_2 = 1$ se nalazi u intervalu $1 \leq x_2 = 1 < 3$ pa je $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Slično je $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, dok je $f(5) = \frac{2 \cdot 5 - 1}{4-5} = -9$. ■

Primjer 12. Odrediti koje od slijedećih implicitno zadanih relacija predstavljaju funkcije:

(a) $3x - 4y + 3 = 0$ (b) $y^2 - x^2 = 4$ (c) $x + y^3 = 4$

Rješenje: (a) Implicitno zadana jednadžbu može se preoblikovati u eksplicitni oblik

$$y = \frac{3x + 3}{4}.$$

Gornjom formulom svakoj vrijednosti varijable x pridružena je jedinstvena vrijednost varijable y:

$$x \mapsto \frac{3x + 3}{4}$$

pa je implicitnom relacijom $3x - 4y + 3 = 0$ zadana funkcija.

(b) Transformacijom jednadžbe $y^2 - x^2 = 4$ dobije se $y^2 = 4 + x^2$. Vađenjem korijena slijedi:

$$y = \pm\sqrt{4 + x^2}.$$

Izraz $4 + x^2$ pozitivan, a svaki pozitivan broj ima dva kvadratna korijena, pa su varijabli x pridružene dvije vrijednosti:

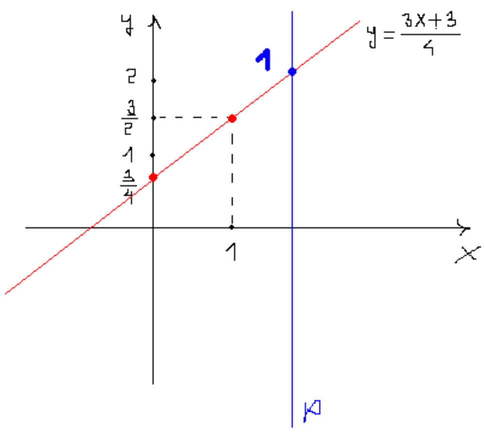
$$x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{4 + x^2} \\ \\ +\sqrt{4 + x^2} \end{cases}$$

odakle slijedi zaključak da relacija $x^2 + y^2 = 4$ nije funkcija.

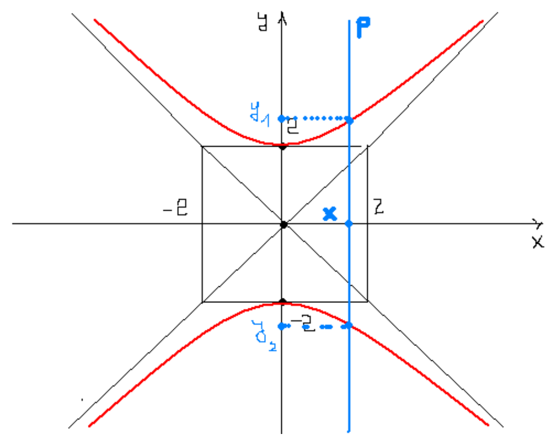
(c) Relacija $x + y^3 = 4$ predstavlja funkciju, jer se može eksplicitno zapisati kao $y = \sqrt[3]{4 - x}$. Naime, $4 - x$ je realan broj a svakom realnom broju je pridružena jedinstvena vrijednost trećeg korijena. ■

Primjer 13. Primjeniti vertikalni test na krivulje zadane jednadžbama iz prethodnog primjera.

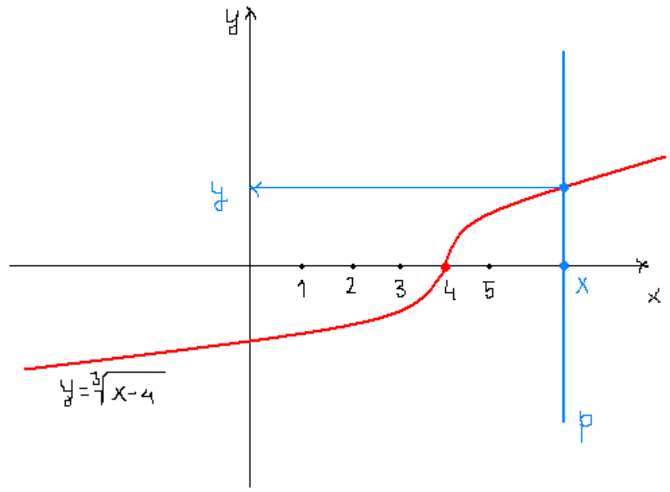
Rješenje:



Sl.17. Pravac $y = \frac{3x+3}{4}$ je funkcija što pokazuje i vertikalni test jer pravac p siječe krivulju samo u jednoj točki



Sl.18. Hiperbola $y^2 - x^2 = 4$ nije funkcija jer vertikalni pravac p siječe njezin graf u dvije točke, što znači da se varijabli x pridruže dvije vrijednost y



Sl.19. Jednadžba $x + y^3 = 4$ predstavlja funkciju jer vertikalni pravac p siječe njezin graf samo u jednoj točki

■

REALNE FUNKCIJE

Realne funkcije su one čija domena i kodomena pripadaju skupu realnih brojeva.

Def. Realna funkcija realne varijable je funkcija $f: D \to K$ pri čemu su $D, K \subseteq \mathbb{R}$.

Dvije funkcije su jednake ako se podudaraju njihove domene, kodomene i zakoni preslikavanja. Tako se funkcija

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$$

razlikuje od funkcije

$$g(x) = \frac{1}{x+1},$$

jer ove naizgled identične funkcije nemaju istu domenu. Naime $D(f) = \mathbb{R}/\{\pm 1\}$ dok je $D(g) = \mathbb{R}/\{1\}$.

PRIRODNA DOMENA FUNKCIJE

Kod zadavanja realne funkcije $y = f(x)$ često nije eksplicitno zadana domena funkcije. U takvim slučajevima se podrazumijeva da je domena najveći skup vrijednosti varijable x za koje je funkcija $f(x)$ definirana. Takva domena funkcije $y = f(x)$ naziva se prirodnom domenom.

Primjer 1. Odrediti prirodnu domenu funkcija:

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$ (b) $g(w) = \sqrt{w-2}$

Rješenje: (a) Uvrsti li se u zadanu formulu $x = 2, x = -\frac{1}{3}$ ili $x = \pi$ dobiju se slijedeće vrijednosti funkcije:

$$f(2) = \frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3, f(\pi) = \frac{1}{\pi}$$

Za navedene vrijednosti varijable x formula $f(x) = \frac{1}{x}$ ima smisla tj. rezultati koji se dobiju su realni brojevi. Zato brojevi $2, -\frac{1}{3}$ i π pripadaju prirodnoj domeni funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$. To nije slučaj s brojem $x = 0$ jer dijeljenje s nulom nije definirano. Formula $f(x) = \frac{1}{x}$ daje besmislen izraz kad se u nju uvrsti vrijednost $x = 0$. Drugim riječima, izraz $f(0) = \frac{1}{0}$ je besmislen. Zato realni broj 0 nije element prirodne domene ove funkcije. Prema tome, prirodna domena funkcije f je skup:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}/\{0\}.$$

(b) Poznato je da nije moguće računati korijen iz negativnih brojeva, pa domena funkcije $g(w) = \sqrt{w-2}$ sadrži one vrijednosti varijable w takve da je $w - 2 \geq 0$, što je ekvivalentno s $w \geq 2$. Domena funkcije g je:

$$D(g) = [2, +\infty\rangle$$

Primjer 2. Odredite prirodnu domenu funkcije:

$$H(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{x-3}}.$$

Rješenje: Da bi funkcija H bila definirana izraz koji se nalazi pod korijenom mora biti pozitivan, odakle se dobije uvjet:

$$\frac{2x-1}{x-3} \geq 0$$

$$\begin{array}{c} 2x-1 \geq 0 \\ \underline{x-3>0} \end{array} \qquad ili \qquad \begin{array}{c} 2x-1 \leq 0 \\ \underline{x-3<0} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2x \geq 1 \\ \underline{x>3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} 2x \leq 1 \\ \underline{x<3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \geq 1/2 \\ \underline{x>3} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} x \leq 1/2 \\ \underline{x<3} \end{array}$$

$$x > 3 \Rightarrow x \in \langle 3, +\infty\rangle \qquad\qquad x \leq 1/2 \Rightarrow x \in \langle -\infty, 1/2]$$

Domena funkcije H jednaka je uniji dobivenih intervala:

$$D(H) = \langle -\infty, 1/2] \cup \langle 3, +\infty\rangle.$$

■

Primjer 3. Odredite prirodnu domenu funkcije:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}.$$

Nacrtati graf $y = f(x)$.

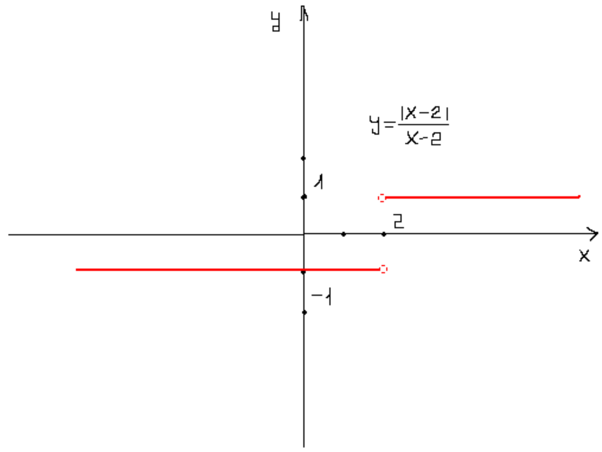
Rješenje: Dijeljenje s nulom nije definirano pa domena funkcije f ne sadrži točku 2, odnosno

$$D(f) = \mathbb{R}/\{2\}.$$

Apsolutne vrijednosti eliminiraju se iz gornjeg izraza razlikovanjem slučajeva. Na taj način dobije se slijedeća po dijelovima definirana funkcija:

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2}, ako\ je\ x-2>0 \\ \dfrac{-x+2}{x-2}, ako\ je\ x-2<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, ako\ je\ x>2 \\ -1, ako\ je\ x<2 \end{cases}.$$

Graf ove funkcije ima stepenasti oblik:



Sl.21. Graf funkcije $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

■

SLIKA FUNKCIJE

Skup svih vrijednosti koje može poprimiti neka funkcija naziva se slika funkcije. Prilikom zadavanja funkcije najčešće se za kodomenu uzima širi skup od slike funkcije, a to je u najvećem broju slučajeva skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$. Mogu postojati elementi kodomene koji ne pripadaju slici funkcije. Slika funkcije je podskup kodomene koja može, ali i ne mora, obuhvaćati čitavu kodomenu.

Def. Slika funkcije $f: D \to K$ je skup svih vrijednosti koje može poprimiti funkcija. Kod definicije slike funkcije koristi se oznaka

$$R(f) = \{f(x): x \in D\} \subseteq K$$

Primjer 1. Odredite slike slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Rješenje: (a) Slika funkcije $f(x) = 2x - 1$ je skup svih realnih brojeva $\mathbb{R}$. Da bi se dokazala ta činjenica izabere se neki proizvoljni realni broj $b \in \mathbb{R}$. Tada postoji realan broj a iz domene funkcije f takav da je $2a - 1 = b$ odnosno $a = \frac{b+1}{2}$. Za tako izabrani realni broj a vrijedi:

$$f(a) = f\left(\frac{b+1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{b+1}{2} - 1 = b + 1 - 1 = b.$$

Prema tome, pokazano je da za neki proizvoljno izabrani realni broj $b \in \mathbb{R}$ postoji realan broj $a \in \mathbb{R}$ takav da je $f(a) = b$. Može se zaključiti da je to moguće učiniti i za svaki realan broj pa je slika od f jednaka $R(f) = \mathbb{R}$.

(b) Iz očigledne nejednakosti

$$0 \leq x^2 < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

slijedi da je

$$1 \leq x^2 + 1 < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dakle izraz $\frac{1}{1+x^2}$ se nalazi u intervalu $\langle 0, 1]$ što je ujedno i slika funkcije $R(f) = \langle 0, 1]$. ■

BIJEKCIJA

Bijekcija je preslikavanje koje različite elemente iz domene preslikava u različite elemente iz kodomene pri čemu se u svaki element iz kodomene preslika odgovarajući element iz domene. Ovaj pojam veoma je značajan, jer je samo za bijektivne funkcije moguće određivanje inverza.

Def. Funkcija $f: D \to K$ je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

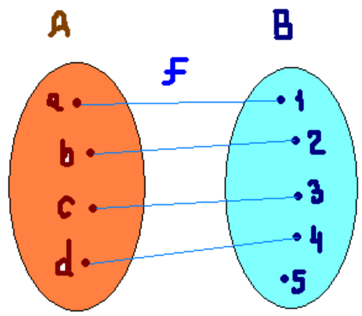
Funkcija $f: D \to K$ je injekcija ako

$$\forall x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

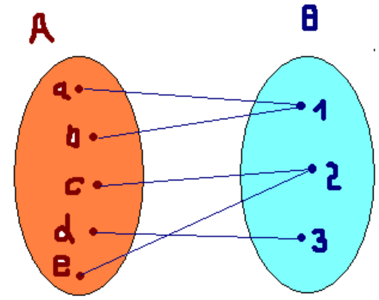
Injekcija je funkcija koja različite elemente iz domene preslikava u različite elemente iz kodomene.

Funkcija $f: D \to K$ je surjekcija ako $\forall b \in K$ postoji $a \in D$ takav da je $f(a) = b$. Kod surjekcije svaki element iz kodomene mora biti „pogođen" određenim elementom iz domene. U kodomeni nema niti jednog elementa u koji se nije preslikao barem jedan element iz domene.

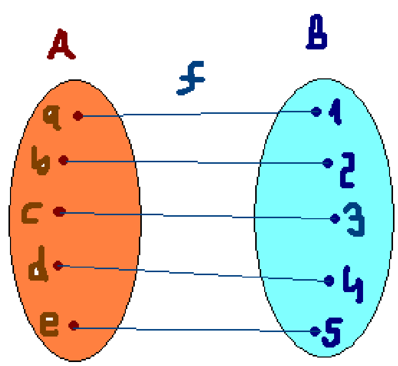
Slijedeće slike sadrže grafičke prikaze injekcije, surjekcije i bijekcije.



Sl.22. Funkcija f je injekcija jer se različiti elementi iz domene preslikavaju u različite elemente iz kodomene ali nije surjekcija jer elementu 5 *iz kodomene nije pridružen niti jedan element iz domene.*



Sl. 23. Funkcija f je surjekcija jer je čitava kodomena pogođena elementima iz domene. Funkcija nije injekcija jer se neki elementi iz domene preslikavaju u iste elemente kodomene. Npr. a i b se preslikavaju u element 1.



Sl. 24. Funkcija f je bijekcija jer je istovremeno injekcija i surjekcija.

Primjer 1. Koje od slijedećih tablično zadanih funkcija su bijekcije?

(a) Tablica trećih korijena

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

(b) Tablica kvadrata

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

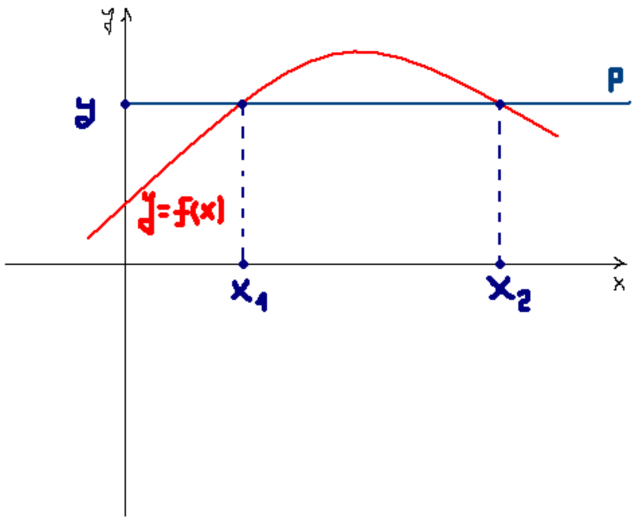
Rješenje: Tablica trećih korijena (a) je bijekcija dok tablica kvadrata (b) nije. ■

Horizontalnim testom moguće je grafički odrediti koji graf funkcije predstavlja (injekciju) bijekciju. Ako je funkcija bijekcija onda horizontalni pravac siječe dani graf najviše u jednoj točki. Ako horizontalni pravac siječe graf funkcije u dvije ili više točaka onda funkcija nije bijekcija.

Ukoliko horizontalni pravac siječe graf u dvije ili više točaka tada se različite vrijednosti varijable x iz domene preslikavaju u isti y iz kodomene pa funkcija nije injekcija (bijekcija).

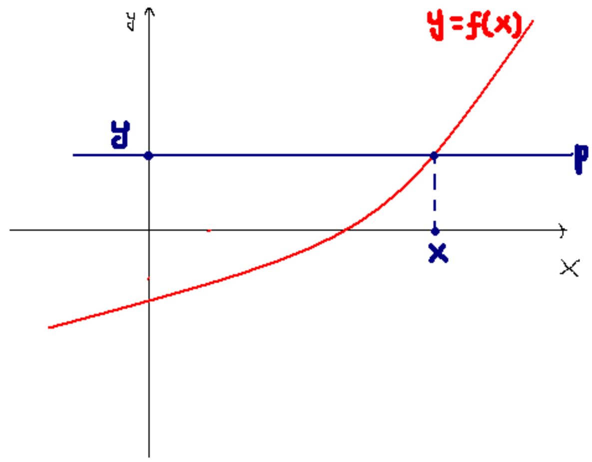
Primjer 2. Provjeriti koji od slijedećih grafova predstavljaju bijekciju.

(a)



Sl.24. Funkcija prikazana ovim grafom nije bijekcija što se vidi iz horizontalnog testa. Naime, dvije vrijednosti x_1, x_2 *iz domene se preslikaju u jedinstveni element y iz kodomene pa funkcija nije injekcija.*

(b)



Sl.25. Ova funkcije je bijekcija. Horizontalni test pokazuje da se različiti elementi iz domene preslikavaju u različite elemente iz kodomene.

■

Primjer 3. Dokazati da je funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 2x + 3$ bijekcija.

Rješenje: Dokaže se da je zadana funkcija injekcija i surjekcija.

Izaberu se dva različita elementa $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ iz domene. Tada $x_1 \neq x_2$ povlači da je $2x_1 \neq 2x_2$ odakle slijedi da je $2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3$ odnosno $f(x_1) \neq f(x_2)$ pa je f injekcija.

Ostalo je pokazati da je f surjekcija. Izabere se proizvoljni element $b \in \mathbb{R}$ iz kodomene. Traži se element $a \in \mathbb{R}$ iz domene koji se preslika u b, odnosno za koji je $f(a) = b$. Iz prethodne relacije dobije se jednadžba $2a + 3 = b$ pa je $a = \frac{b-3}{2}$. Za tako zadani element a vrijedi:

$$f(a) = f\left(\frac{b-3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{b-3}{2} + 3 = b - 3 + 3 = b$$

Ovim postupkom je za proizvoljno zadani element b iz kodomepronađen element a iz domene takav da je $f(a) = b$ pa je funkcija f surjekcija. Kako je f injekcija i surjekcija ona je i bijekcija. ■

Primjer 4. Je li funkcija $g(x) = x^2$ injekcija?

Rješenje: Nije, jer se npr. različiti elementi $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ iz domene preslikaju u zajednički element $f(-1) = f(1) = 1$ iz kodomene. ■

ALGEBARSKE OPERACIJE S FUNKCIJAMA

U velikom broju slučajeva funkcija može biti načinjena kao kombinacija dvije ili više funkcija koje su povezane algebarskim operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja ili dijeljenja. U tom slučaju prirodna domena se nalazi u presjeku domena zadanih funkcija.

Primjer 1. Zadane su funkcije $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ i $g(x) = \sqrt{x+2}$. Odredite prirodnu domenu sume ovih funkcija.

Rješenje: Suma funkcija $f(x)$ i $g(x)$ definirana je kao:

$$h(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}.$$

Da bi funkcija $h(x)$ bila definirana varijabla x mora biti takva da je definirana formula $f(x)$ i formula $g(x)$, što znači da x mora biti element domene od f i domene od g a to je presjek domena obje funkcije:

$$D(h) = D(f) \cap D(g).$$

Dijeljenje s nulom nije definirano pa je:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x^2 \neq 0\}.$$

Riješi se jednadžba:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Može se zaključiti da je:

$$D(f) = \mathbb{R}/\{1\}.$$

Korijen je moguće izvaditi samo iz pozitivnih brojeva pa je:

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R}: x + 2 \geq 0\} = [-2, +\infty\rangle.$$

Prema tome, domena sume je:

$$D(h) = D(f) \cap D(g) = [-2, +\infty\rangle/\{1\} = [-2, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle.$$

■

Primjer 2. Odrediti prirodnu domenu umnoška $p(x)$ funkcija $f(x) = \sqrt{x-2}$ i $g(x) = \sqrt{3-x}$.

Rješenje: Umnožak funkcija definiran je kao:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3}.$$

Varijabla x se nalazi u domeni funkcije $p(x)$ ako je u domeni funkcije $f(x)$ i funkcije $g(x)$:

$$D(p) = D(f) \cap D(g).$$

Varijabla x je element domene funkcije f ako je ispunjen uvjet:

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2,+\infty\rangle$$

pa je

$$D(f) = [2,+\infty\rangle$$

Za domenu funkcije g treba biti ispunjeno:

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3,+\infty\rangle,$$

pa je:

$$D(g) = [3,+\infty\rangle.$$

Domena funkcije p jednaka je presjeku domena funkcija f i g:

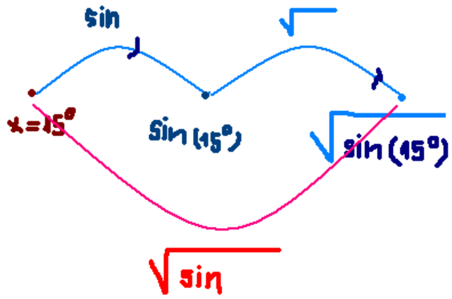
$$D(p) = D(f) \cap D(g) = [3,+\infty\rangle.$$

■

KOMPOZICIJA FUNKCIJA

Kompozicija ili slaganje funkcija je jedna od najprirodnijih operacija nad funkcijama kod koje jedna funkcija djeluje na rezultat druge funkcije.

Na primjer, korištenjem kalkulatora može se izračunati vrijednost izraza $\sqrt{sin 15^0}$ tako da se najprije odredi $sin 15^0 = 0.258819045$ a zatim iz dobivenog rezultata izvadi korijen $\sqrt{0.258819045} = 0.508742612$. U ovom primjeru na varijablu $x = 15^0$ najprije djeluje funkcija sin a zatim $\sqrt{}$.



Sl. 26. Na ulaznu varijablu $x = 15^0$ *djeluje sin a zatim* $\sqrt{\ }$

Primjer 1. Neka je funkcijom $p(h)$ opisan tlak pod morem na dubini h i neka je s $H(t)$ zadana dubina podmornice u nekom vremenu t. Tada je tlak na podmornicu u vremenu t jednak kompoziciji $p\big(H(t)\big)$. ■

Primjer 2. Funkcija $h(x) = 2x + 3$ može se prikazati slijedećim dijagramom:

$$x \mapsto \boxed{množenje\ s\ 2} \mapsto 2x \mapsto \boxed{zbrajanje\ s\ 3} \mapsto 2x + 3$$

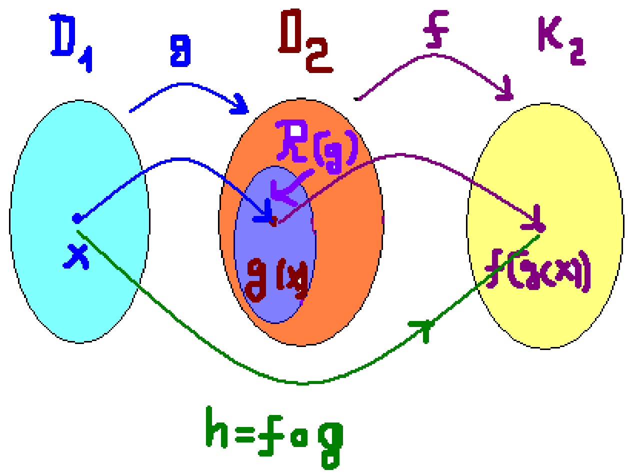
Dakle, na varijablu x djeluju dvije funkcije, množenje s 2 i zbrajanje s 3. ■

Def. Neka su zadane dvije funkcije $g: D_1 \to K_1$ i $f: D_2 \to K_2$ takve da je slika funkcije g podskup domene od f t.j. $R(g) \subseteq D_2$. Tada se kompozicija te dvije funkcije $h = f \circ g: D_1 \to K_2$ definira kao:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

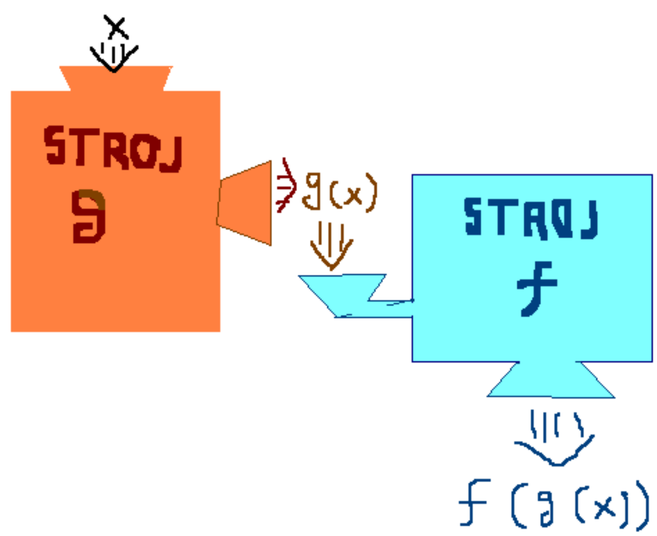
što se čita kao f komponiorano g ili f kružić g.

Kod kompozicije $h = f \circ g$ nezavisnu varijablu x funkcija g preslika u $g(x)$ a zatim funkcija f preslika element $g(x)$ u $f\big(g(x)\big)$, što je prikazano na slijedećoj slici:



Sl.27. Grafički prikaz kompozicije $h = f \circ g$

Kompoziciju funkcija $f \circ g$ može se shvatiti i kao djelovanje dva funkcijska stroja. Najprije se nezavisna varijabla x ubaci u stroj g i kao izlaz dobije $g(x)$ a zatim se $g(x)$ ubaci u stroj f koji kao „finalni proizvod“ izbaci kompoziciju $f\big(g(x)\big)$.



Sl.28. Kompozicija kao djelovanje funkcijskih strojeva

Primjer 3. Zadana je funkcija $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$. Napisati izraze za $f(2)$,$f(ž)$, $f(x - 2)$, $f(y^2)$.

Rješenje: Vrijednost funkcije u točki 2 dobije se uvrštavanjem broja 2 u formulu za $f(x)$:

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2 + 2 = 12$$

Izraz $f(ž)$ dobije se uvrštavanjem varijable ž u formulu $f(x)$:

$$f(ž) = ž^3 + ž^2 - ž + 2$$

Da bi se dobilo $f(x-2)$ i $f(y^2)$ u formulu $f(x)$ treba na mjesto varijable x uvrstiti $x-2$ i y^2:

$$f(x-2) = (x-2)^3 + (x-2)^2 - (x-2) + 2$$

Odnosno

$$f(y^2) = (y^2)^3 + (y^2)^2 - y^2 + 2 = y^6 + y^4 - y^2 + 2.$$

■

Primjer 4. Zadane su funkcije $f(u) = u^2 + 2$ i $g(x) = \frac{1}{x}$. Odrediti kompozicije $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$.

Rješenje: Kompozicija $(f \circ g)(x)$ dobije se ubacivanjem izraza $g(x)$ u funkciju $f(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) =$$

$$= \big(g(x)\big)^2 + 2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2 = \frac{1}{x^2} + 2.$$

Kompozicija $(g \circ f)(x)$ dobijemo se ubacivanjem funkcije $f(x)$ u formulu $g(x)$ na mijesto varijable x:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 2}$$

■

Primjer 5. Neka je $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Odrediti:

(a) $(f \circ f)(x)$ (b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ (c) $f(cx)$ (d) $f(x+y)$ (e) $f(x) + f(y)$

Rješenje: (a) Prema definiciji kompozicije je:

$$(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{1}{f(x) + 1} = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{1}{\frac{1 + x + 1}{x+1}} = \frac{x+1}{x+1}$$

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right)$ dobije se uvrštavanjem izraza $\frac{1}{x}$ u funkciju $f(x)$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{\frac{1+x}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

(c)

$$f(cx) = \frac{1}{cx+1}$$

(d) Vrijednost funkcije u točki $x + y$ jednaka je:

$$f(x+y) = \frac{1}{x+y+1}$$

(e)

$$f(x) + f(y) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}$$

■

Primjer 6. Zadane su funkcije $S(x) = x^3$, $P(x) = 3^x$ i $s(x) = sinx$.

Izračunati:

(a) $(S \circ P)(x)$

(b) $(S \circ s)(x)$

(c) $(S \circ P \circ s)(t) + (S \circ P)(t)$

(d) $s(t^3)$

Riješenje: (a) Prema definiciji kompozicije je:

$$(S \circ P)(x) = S\big(P(x)\big) = \big(P(x)\big)^3 = (3^x)^3 = 3^{3x}.$$

(b)

$$(S \circ s)(x) = S\big(s(x)\big) = \big(s(x)\big)^3 = (sinx)^3 = sin^3x.$$

(c)

$$(S \circ P \circ s)(t) + (S \circ P)(t) = S\big((P \circ s)(t)\big) + S\big(P(t)\big) =$$

$$= \left((P \circ s)(t)\right)^3 + \left(P(t)\right)^3 = \left(P\left(s(t)\right)\right)^3 + (3^t)^3 =$$

$$= \left(3^{s(t)}\right)^3 + 3^{3t} = \left(3^{sint}\right)^3 + 3^{3t} = 3^{3sint} + 3^{3t}.$$

(d)

$$s(t^3) = sint^3$$

■

Primjer 7. Zapisati funkciju $F(u) = sin\left(3^u - 3^{u^3}\right)$ pomoću funkcija $S(x) = x^3$, $P(x) = 3^x$ i $s(x) = sinx$ koristeći se algebarskim operacijama $+, -, \cdot, :$ i kompozicijom $\circ$.

Rješenje: $F(u) = sin\left(P(u) - 3^{S(u)}\right) = sin\left(P(u) - P\left(S(u)\right)\right) = s\left(P(u) - (P \circ S)(u)\right)$ ■

KVOCIJENT DIFERENCIJA

Neka je zadana funkcija $f(x)$. Prirast funkcije Δf pri promijeni vrijednosti varijable x za neku veoma malu vrijednost h definiran je kao:

$$\Delta f = f(x+h) - f(x)$$

dok je prirast varijable Δx jednak:

$$\Delta x = h = x + h - x$$

Kvocijent diferencija je izraz oblika:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Iz definicije je vidljivo da se kvocijentom diferencija računa prosječna promijena vrijednosti funkcije f pri promijeni vrijednosti varijable x za neki h.

Primjer 1. Odrediti kvocijent diferencija funkcije:

$$f(x) = x^2 + 5x.$$

Rješenje: Odredi se oblik izraza:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 5(x+h) - (x^2 + 5x)}{h} =$$

$$= \frac{x^2 + 2hx + h^2 + 5x + 5h - x^2 - 5x}{h} =$$

$$= \frac{2hx + h^2 + 5h}{h} = 2x + h + 5.$$

■

Kvocijent diferencija se javlja u primjenama kod izračunavanja prosječne brzine kojom se mijenja neka veličina.

Primjer 2. Odredite prosječnu brzinu tijela koje slobodno pada od 2 do 3 sekunde. Poznato je da se put koji prevali tijelo koje slobodno pada računa po formuli $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Rješenje: Prosječna brzina tijela slobodno pada od 2 do 3 sekunde jednaka je:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2}$$

Izraz $\frac{s(3)-s(2)}{3-2}$ predstavlja kvocijent diferencija funkcije $s(t)$. Prema tome:

$$\bar{v} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{g \cdot 3^2 - g \cdot 2^2}{1} = 9g - 4g = 5g = 49.05\, m/s.$$

■

INVERZNA FUNKCIJA

Brojne odnose među veličinama moguće je opisati funkcijama, kao npr.:

$$V(r) = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Volumen kugle V kao funkcija radijusa r

$$F(C) = \frac{9}{5} C + 32$$

Temperatura u F^0 izražena kao funkcija koja ovisi o stupnjevima Celzijusa C^0

$$V(P) = \frac{k}{P}$$

Volumen plina V je funkcija tlaka plina P

U nekim slučajevima potrebno je odrediti obrnute ili inverzne relacije kao npr.:

$$r(V) = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$$

Radijus kugle r kao funkcija koja ovisi o volumenu V

$C(F) = \frac{5}{9}(C - 32)$	Temperatura u stupnjevima Celzijusa C^0 izražena kao funkcija stupnjeva Farenheita F^0
$P(V) = \frac{k}{V}$	Tlaka plina P u ovisnosti o volumenu plina V

Prethodni primjeri pokazuju da postoji obrnuta relacija među varaijablama koje povezuju odgovarajuće veličine. Na taj način dobije se nova funkcija koja se naziva inverznom funkcijom zadane funkcije.

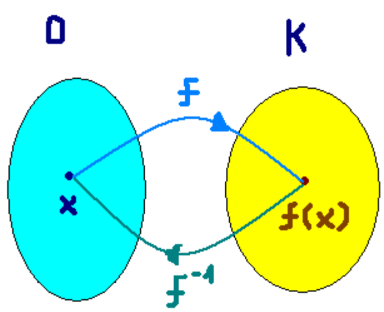
Ne mora svaka funkcija nužno imati inverz. Npr., za funkciju $f(x) = x^2$ nije moguće odrediti inverznu funkciju. Naime, nije moguće jednoznačno odrediti funkcijsku ovisnost varijable x o varijabli y jer iz relacije $y = x^2$ slijedi da je $x = \pm\sqrt{x}$. U tom slučaju bi svakoj vrijednosti varijable x trebalo pridružiti dvije vrijednosti varijable y, a takvo preslikavanje nije funkcija.

Inverz postoji ukoliko je funkcija $f(x)$ bijekcija.

Def 5. Neka je zadana funkcija $f: D \to K$ bijekcija. Funkcija $g: K \to D$ je inverzna funkcija funkcije f ako vrijedi $(g \circ f)(x) = x$ i $(f \circ g)(x) = x$. Inverznu funkciju g funkcije f označava se kao $g = f^{-1}$.

Iz definicije slijedi da je kodomena funkcije f domena funkcije f^{-1} i obrnuto, kodomena funkcije f^{-1} je domena funkcije f.

Na slijećoj slici 29. prikazano je djelovanje inverzne funkcije.



Sl. 29. Djelovanje funkcija f i f^{-1}

Djelovanje funkcije f^{-1} poništava djelovanje funkcije f. Naime po funkciji f varijabla x iz domene se preslika u $f(x)$ u kodomeni. Inverzna funkcija f^{-1} element $f(x)$ iz kodomene preslika natrag u $x = f^{-1}\big(f(x)\big)$ iz domene.

Primjer 1. Odrediti inverznu funkciju funkcije $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane formulom

$$f(x) = x^3 + 1.$$

Rješenje: Nije teško provjeriti da je funkcija $f(x)$ bijekcija, pa postoji inverzna funkcija. Za inverznu funkciju vrijedi da je $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ odakle slijedi relacija:

$$x = f\big(f^{-1}(x)\big) = \big(f^{-1}(x)\big)^3 + 1$$

pa je

$$\big(f^{-1}(x)\big)^3 + 1 = x \Rightarrow \big(f^{-1}(x)\big)^3 = x - 1$$

odnosno

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}.$$

Rezultat se može provjeriti pomoću definicije inverzne funkcije:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\big(f^{-1}(x)\big) = \big(f^{-1}(x)\big)^3 + 1 = \big(\sqrt[3]{x-1}\big)^3 + 1 =$$

$$= x - 1 + 1 = x$$

Također:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = \sqrt[3]{f(x) - 1} = \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} =$$

$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

Provjereno je da funkcija f^{-1} ispunjava sve uvjete iz definicije inverzne funkcije. ■

Inverzna funkcija može se odrediti u slijedećih nekoliko koraka:

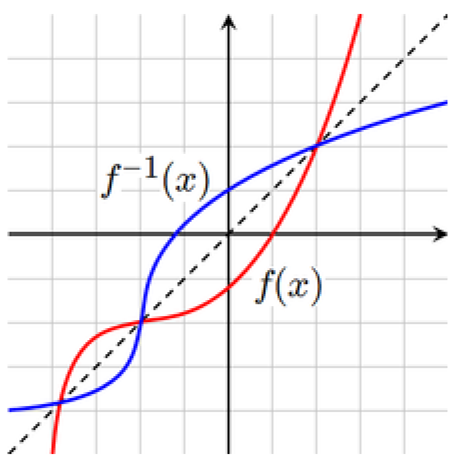
1. Privjerimo se je li funkcija $f(x)$ bijekcija. U tom slučaju inverz postoji.
2. Iz formule $y = f(x)$ treba izraziti x kao funkciju od y. Zato je najprikladnije zamjeniti varijable x i y u formuli $y = f(x)$ čime se dobije relacija $x = f(y)$.
3. Iz relacije $x = f(y)$ odredi se y koji se tretira kao nepoznanica u prethodnoj relaciji.
4. Tako dobiveni y koji ovisi o varijabli x predstavlja traženu inverznu funkciju, odnosno $y = f^{-1}(x)$.

Primjer 2. Odrediti inverzne funkcije slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3+8}$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x} - 2}$

Graf inverzne funkcije $y = f^{-1}(x)$ simetričan je na graf polazne funkcije $y = f(x)$ obzirom na simetralu 1. i 3. kvadranta. Naime, točka $\big(x, f(x)\big)$ simetrična je točki $(f(x), x)$.



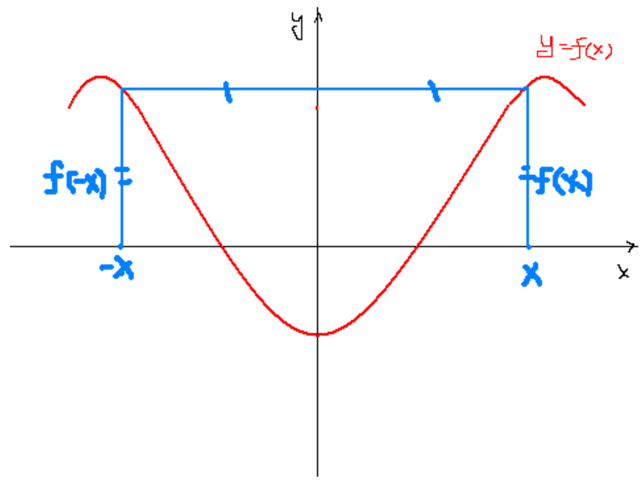
Sl. Grafovi funkcija $y = f(x)$ i $y = f^{-1}(x)$ simetrični su obzirom na pravac $y = x$

PARNE I NEPARNE FUNKCIJE

Def. Funkcija $f\colon D \to K$ je parna ako je $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$, neparna ako je $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

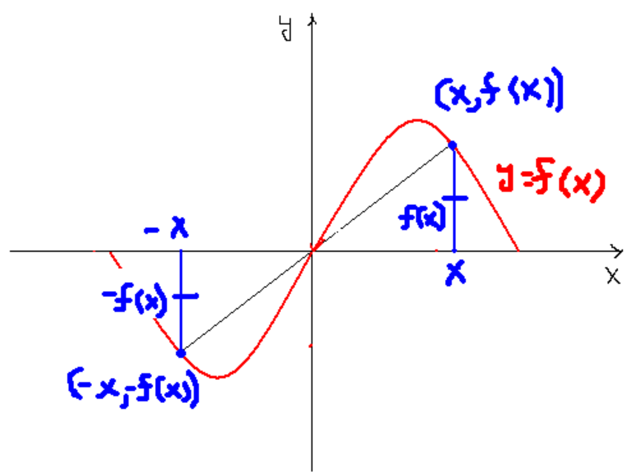
Na primjer funkcija $f(x) = x^2$ je parna funkcija jer je $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Iz definicije proizlazi geometrijsko svojstvo parne funkcije koja je simetrična obzirom na os-y (vidi Sl. 29). Zato je dovoljno nacrtati graf funkcije f za one vrijednosti varijable x koje su veće od nule, $x \geq 0$.



Sl.29. Parna funkcija je simetrična obzirom na os-y

Funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Graf neparne funkcije sadrži točke $\big(x, f(x)\big)$ i $\big(-x, -f(x)\big)$ koje su simetrične obzirom na točku ishodišta. Zato je graf neparne funkcije simetričan obzirom na ishodište (vidi Sl. 30).



Sl.30. Graf neparne funkcije je simetričan obzirom na ishodište

Primjer 1. Ispitati parnost i neparnost zadanih funkcija:

(a) $f(x) = x^5 + x^3 + 3x$

(b) $g(x) = \frac{x^2+2}{1-x^4}$

(c) $h(x) = \frac{x-2}{x+3}$.

Rješenje: (a) Računa se $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^3 + 3(-x) = -x^5 - x^3 - 3x = -(x^5 + x^3 + 3x) = -f(x)$$

Dakle, funkcija f je neparna.

(c) Funkcija $g(x)$ je parna:

$$g(-x) = \frac{(-x)^2 + 2}{1 - (-x)^4} = \frac{x^2 + 2}{1 - x^4} = g(x)$$

(c)

$$h(-x) = \frac{-x - 2}{-x + 3} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

Kako $h(-x) \neq h(x)$ i $h(-x) \neq -h(x)$ ova funkcija nije ni parna ni neparna.

■

ZADACI ZA VJEŽBU

Primjer 1. Temperaturu zraka T mjerena u C^0na visini h je moguće izračunati pomoću formule

$T(h) = 17 - 0.0065h$ gdje je h zadano u metrima. Helikopter koji je uzletio s piste koja se nalazi na nadmorskoj visini od $500m$ se nalazi na visini $h(t) = 10\sqrt{t} + 500$ u vremenu od t sekundi nakon polijetanja.

(a) Nađite funkciju koja daje temperaturu zraka na visini na kojoj se nalazi helikopter t sekundi nakon polijetanja.

(b) Kolika je temperatura zraka na visini na kojoj se nalazi helikopter 2 minute od polijetanja?