UVOD U TEORIJU SKUPOVA

SADRŽAJ

POJAM SKUPA

Jezik teorije skupova koristi se u gotovo svim matematičkim definicijama. Riječ skup koristi se za opisivanje kolekcije, zbirke ili grupe objekata. Pojam skupa je temeljni matematički pojam kojeg nije moguće definirati pomoću temeljnijih pojmova.

U teoriji skupova se pojavljuju i paradoksi poput poznatog Russelovog paradoksa. Russelov paradoks može se formulirati i kao priča o seoskom brijaču.

Primjer 1. (Russelov paradoks) U jednom selu postoji brijač koji brije sve one koji sami sebe ne briju. Tko brije brijača?

Rješenje: Kad bi brijač brijao samog sebe onda on nebi bio onaj koji brije samo one koji se sami ne briju. Pođemo li od suprotne pretpostavke, da brijač ne brije samog sebe , onda on nebi bio taj koji brije sve one koji se sami ne briju .

■

Skupovi se zapisuju velikim slovima $A, B, C, X, Y, \ldots$ a elementi skupova malim slovima $a, b, c, x, p, q, \ldots$

Skupove je moguće zadavati na dva načina, navođenjem elemenata ili opisivanjem elemenata koji sačinjavaju skup.

Primjer 2. (a) Slovom A označen je skup svih država u Africi. Simbolički se to zapisuje kao $A = \{Alžir, Angola, \ldots, Zimbabve\}$.

(b) Neka je G skup svih zvijezda Mliječnog puta. Skup G ne može se definirati navođenjem elemenata jer se svakog trenutka rađaju neke nove zvijezde a stare se gase .

(c) Neka je $2\mathbb{N}$ skup svih parnih brojeva, $2\mathbb{N} = \{2,4,6,8, \ldots\}$. Iako je taj skup beskonačan, dovoljno je navesti nekoliko prvih elemenata da bi znali o kojem skupu se radi .

■

Def. Relacija pripadnosti nekom skupu označava se s $a \in A$ ako element a pripada skupu A. Ukoliko element a ne pripada skupu A koristi se oznaka $a \notin A$.

Primjer 3. (a) $Tunis$ očito pripada skupu A iz Primjera 2. odnosno $Tunis \in A$, $Hrvatska \notin A$.

(a) Slično, $Zemlja \notin G$ pri čemu je skup G definiran u Primjeru 2. ∎

Skupovi se mogu definirati pomoću svojstava koja ispunjavaju njegovi elementi.

Primjer 4. Primjerice, skup $P = \left\{n \in \mathbb{N}: n > 1, \frac{n}{m} \notin \mathbb{N}, 1 < m < n\right\}$ je skup svih prirodnih brojeva $n \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi da n nije djeljiv niti sa jednim brojem od 1 do $n - 1$. Očito se radi o skupu svih prostih brojeva. ∎

Def. Univerzalni skup sadrži sve elemente koji se nalaze u zadanim skupovima. Označava se s Ω.

Primjer 5. Za skupove $P = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{n}{2} \in \mathbb{N}\right\}$ i $Q = \left\{n \in \mathbb{N}: \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\right\}$ svih parnih brojeva i svih prirodnih brojeva koji su djeljivi sa 3 prirodno je izabrati skup svih prirodnih brojeva za univerzalni skup, odnosno $\Omega = \mathbb{N}$. ∎

Def. Prazan skup u oznaci $\emptyset$ ne sadrži niti jedan element.

Primjer 6. Primjerice „skup svih magaraca na Marsu“ ili „skup svih okruglih kvadrata“ su prazni skupovi. ∎

PODSKUPOVI I JEDNAKOST SKUPOVA

Def. Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Primjer 7. U kakvom su odnosu skupovi

$$A = \{n \in \mathbb{N}: 2^n \geq n!\}\ i\ B = \{x \in \mathbb{N}: x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$$

Rješenje: Provjerom uvjeta $2^n \geq n!$ direktnim uvrštavanjem elementa dobiju se elementi skupa $A = \{1,2,3\}$. Elementi skupa B su rješenja jednadžbe

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

Prema tome

$$x_1 = 0 \; i \; x^2 - 3x + 2 = 0$$

odnosno

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$$

Dakle

$$B = \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} = A$$

■

Def. Skup A jednak je skupu B ako je svaki element iz skupa A ujedno element i skupa B i obrnuto, svaki element iz skupa B ujedno je element i skupa A:

$$(A = B) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Primjer 8. Odrediti odnose među skupovima $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \; i \; S = \{x \in \mathbb{R}: sinx\pi = 0\}$.

Rješenje: Rješenje jednadžbe je

$$sinx\pi = 0 \Leftrightarrow x\pi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}$$

Stoga je $S = \mathbb{Z}$. Zadani skupovi su u sljedećim odnosima

$$N \subseteq \mathbb{Z} = S$$

■

OPERACIJE SA SKUPOVIMA

Za dva skupa $A, B \subseteq \Omega$ definiraju se operacije sa skupovima:

Unija

$$A \cup B = \{x \in \Omega: x \in A \vee x \in B\}$$

Presjek

$$A \cap B = \{x \in \Omega: x \in A \wedge x \in B\}$$

razlika skupova

$$A/B = \{x \in \Omega : x \in A \wedge x \notin B\}$$

i komplement

$$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$$

Dva skupa $A\ i\ B$ za koje je $A \cap B = \emptyset$ su međusobno disjunktna.

Operacije sa skupovima uobičajeno je grafički predočavati pomoću Veinnovih dijagrama.

Primjer 1. Za skupove $A = \langle 1,5 \rangle$ i $B = [-1,2]$ odredite $A \cap B, A \cup B,\ A/B\ i\ A^c$.

Rješenje:

$$A \cap B = \langle 1, 2], A \cup B = [-1, 5\rangle, A/B = \langle 2,5\rangle, A^c = \langle -\infty, 1] \cup [5, +\infty\rangle$$

■

Za operacije sa skupovima vrijede slična pravila kao i kod računskih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje su algebarske operacije sa brojevima. Slično, unija, presjek, razlika skupova nazivaju se algebarskim operacijama među skupovima.

Teorem. Za skupove $A, B \subseteq \Omega$ vrijede De'Morganove formule:

a)

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

b)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Dokaz:

(a)

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

Primjenom De'Morganove formule algebre sudova dobije se slijedeća ekvivalencija:

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$$

Time je tvrdnja (a) dokazana. Tvrdnja (b) se dokaže slično kao tvrdnja (a). ■

SKUPOVI BROJEVA

Broj je matematički pojam koji se koristi za brojenje i mjerenje. Pojam broja spada među osnovne matematičke pojmove kao i pojam skupa. Ideja prirodnog broja nastala je u samim počecima civilizacije. Definicija broja poopćavala se, te danas uključuje i brojeve poput nule, negativnih brojeva, racionalnih brojeva, iracionalnih brojeva i kompleksnih brojeva.

PRIRODNI BROJEVI I MATEMATIČKA INDUKCIJA

Prirodni brojevi koriste se za prebrojavanje i rangiranje. Ma koliko se prirodan broj činio samorazumljivim, pojam prirodnog broja sadrži visok stupanj apstrakcije. Primjerice, prirodan broj sedam dobije se apstrahiranjem svojstva skupa koji sadrži sedam elemenata. Broj sedam promatra se neovisno o konkretnim sedmeročlanim skupovima kao što su skupovi od sedam studenata, sedam automobila i td. Zbog velikog značaja prirodnih brojeva, njemački matematičar Leopold Kronecker (1823.-1891) smatrao je da „je Bog stvorio prirodne brojeve, a sve ostalo izmislili su matematičari."

Skup prirodnih brojeva označava se s $\mathbb{N}$ te sadrži slijedeće elemente:

Def. Skup prirodnih brojeva**:**

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\dots\}.$$

U nastavku će skup prirodnih brojeva biti opisan aksiomatski, pomoću sustava aksioma. Aksiom je temeljna matematička tvrdnja koju nije moguće objasniti pomoću još jednostavnijih tvrdnji.

Svaki sustav aksioma treba ispunjavati sljedeća pravila:

(a) princip neovisnosti-aksiomi moraju biti tako definirani da se jedan aksiom ne može dokazati pomoću drugih aksioma;

(b) principa neproturječnosti-aksiom ne smije biti proturječan sa drugim aksiomom;

(c) princip potpunosti-treba definirati onoliko aksioma koliko je dovoljno da se iz njih izvede čitava matematička teorija.

Matematička teorija nastaje iz sustava aksioma i sadrži slijedeće dijelove:

(i) osnovnih pojmova koji se ne definiraju (kao pojmovi skupa, točke, broja, funkcije);

(ii) sustava aksioma;

(iii) definicija novih pojmova;

(iv) formulacije i dokazivanja novih teorema, propozicija i korolara.

Skup $\mathbb{N}$ svih prirodnih može se opisati pomoću Peanovih aksioma.

Def. (Peanovi aksiomi) Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ je skup koji zadovoljava slijedeće aksiome:

(P-I) postoji sljedbenik $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;

(P-II) s je injekcija;

(P-III) postoji barem jedan element $1 \in \mathbb{N}$ koji nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja;

(P-IV) za skup prirodnih brojeva vrijedi *princip* matematičke indukcije tj. ako je $M \subseteq \mathbb{N}$ i ako vrijedi:

(a) $1 \in M$

(b) $n \in M$ povlači da je $n + 1 \in M$

Tada je $= \mathbb{N}$.

Prva dva aksioma *P-I* i *P-II* kažu da svaki prirodan broj ima svog sljedbenika. Tako je sljedbenik broja 1 broj 2, sljedbenik broja 2 je broj 3 i tako dalje. Očito je da za svaki prirodan broj postoji njegov sljedbenik. Funkcija "sljedbenik" je takva da je $s(1) = 2, s(2) = 3, \dots$ Aksiom *P-III* kaže da broj 1 nije sljedbenik niti jednog prirodnog broja. Princip matematičke indukcije *P-IV* je očigledan. Ako je ispunjeno (a) da je $1 \in M$ onda svojstvo (b) povlači da je i $s(1) = 2 \in M$ pa ponovo pomoću (b) slijedi zaključak da je $s(2) = 3 \in M$, sada $3 \in M$ povlači da je i $s(3) = 4 \in M$ i tako dalje. Nastavi li se ovaj proces, očito je da će promatrani skup M sadržavati baš sve prirodne brojeve.

Kod empirijske indukcije zaključci se izvlače iz jednog ili više pojedinačnih slučajeva.

Primjer 1. Definirani su brojevi oblika $a_n = n^2 + n + 41$. Uvrštavanjem brojeva $n = 1,2, \dots, 39$ broj a_n će biti prost broj što navodi na krivi zaključak da su svi brojevi gornjeg oblika prosti. Međutim, za $n = 40$ dobiva se $a_{40} = 40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2$ što je složen broj. ■

Primjer 2. Fermatovi brojevi $F_n = 2^{2n} + 1$ su prosti za $n = 1,2,3,4$ pa se čini da je broj F_n prost za svako $n \in \mathbb{N}$. Suprotno toj pretpostavci Euler je dokazao da je F_5 složen. ■

Iz prethodnih primjera može se zaključiti da se empirijska indukcija pokazuje nesigurnom metodom kod izvođenja matematičkih zaključaka.

Princip matematičke indukcije temelji se na četvrtom Peanovom aksiomu.

Princip matematičke indukcije: Ako je neka tvrdnja točna za prirodan broj $\mathrm{n}_0 = 1$ i ako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za prirodan broj $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$ slijedi da ona vrijedi i za prirodan broj $\mathrm{k} + 1 \in \mathbb{N}$, tada ona vrijedi za svaki prirodan broj $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

Stoga se dokaz matematičkom indukcijom sastoji od tri dijela:

1. Baze matematičke indukcije, koja se sastoji od provjere da je tvrdnja istinita za $n = 1$;

2. Pretpostavke matematičke indukcije da promatrana tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$;

3. Koraka indukcije koji sadrži dokaz da tvrdnja vrijedi za $k + 1 \in \mathbb{N}$ pri čemu dokaz koristi pretpostavku da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$.

Nakon provjere prethodna tri dijela, prema principu matematičke indukcije smije se zaključiti da promatrana tvrdnja vrijedi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 3. (Domino day) U Amsterdamu se svake godine održava manifestacija poznata pod nazivom „Domino day“. Prisutni u dvorani se natječu tko će složiti veći broj domino pločica, koje se u određenom trenutku pokrenu tako što se gurne prva domino pločica, koja zatim pokreće cijeli niz domino pločica. Pritom svaka domino pločica u nizu biva gurnuta od domino pločice koja se nalazi iza nje, sve dok ne padne i posljednja domino pločica u nizu.

Analogija sa principom matematičke indukcije sastoji se u tome da pokretanje prve domino pločice odgovara bazi matematičke indukcije. Korak matematičke indukcije sadržan je u činjenici da svaka domino pločica gurne domino pločicu koja se nalazi ispred nje u nizu. Ako je to ispunjeno biti će porušene baš sve domino pločice u nizu, uključujući i posljednju domino pločicu. ■

Primjer 4. Metodom matematičke indukcije dokazati formulu za sumu prvih n prirodnih brojeva:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Baza indukcije. Za $\mathrm{n} = 1$ treba provjeriti identitet

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Dakle, tvrdnja je istinita za $n = 1$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavi se da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$, odnosno da zadana formula vrijedi za $n = k$:

$$S_k = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Korak indukcije. Koristeći pretpostavku, treba dokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1 \in \mathbb{N}$. Polazi se od lijeve strane formule koja sadrži $k + 1$ član:

$$S_{k+1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) =$$

(koristi se pretpostavka indukcije)

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

što znači da tvrdnja vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$. Prema principu matematičke indukcije proizlazi zaključak da tvrdnja vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Primjer 5. (suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva) Metodom matematičke indukcije treba dokazati da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Baza. Provjeri se baza indukcije. Za $n = 1$ dobije se jednakost:

$$1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

pa je tvrdnja točna.

Pretpostavka. Pretpostavimo se da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$ što znači da vrijedi formula

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Korak. Dokaže se da tvrdnja vrijedi za $k+1 \in \mathbb{N}$, pri čemu se smije iskoristiti pretpostavka:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = (pretpostavka) =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} = (k+1)\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} =$$

$$= (k+1)\frac{2k^2 + 4k + 3k + 6}{6} = (k+1)\frac{2k(k+2) + 3(k+2)}{6} =$$

$$= (k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

čime je dokazano da tvrdnja vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$. Na temelju principa matematičke indukcije smije se zaključiti da zadana formula vrijedi $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Primjer 6. Metodom matematičke indukcije dokazati identitet:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz: Baza. Provjeri se tvrdnja za $n = 1$. Na lijevoj strani formule za $n = 1$ dobije se $1/1 \cdot 3$ a na desnoj $1/(2 \cdot 1 + 1)$ pa vrijedi identitet:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

čime je baza provjerena.

Pretpostavka. Pretpostavlja se da je zadana formula točna za neko $k \in \mathbb{N}$, odnosno da vrijedi formula:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

Korak. Sada se dokaže da tvrdnja vrijedi i za $k + 1 \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = (pretpostavka) =$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{2k^2+2k+k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k(k+1)+k+1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Gornjim računom pokazano je da tvrdnja vrijedi za $k + 1 \in \mathbb{N}$ pa na temelju principa matematičke indukcije izlazi zaključak da ista vrijedi i za $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Primjer 7. (suma prvih n članova geometrijskog niza) Dokazati matematičkom indukcijom formulu za sumu prvih n članova geometrijskog niza:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dokaz: Baza. Za $n = 1$ je tvrdnja istinita jer je

$$a_1 q^{1-1} = a_1 \frac{1-q^1}{1-q} \Leftrightarrow a_1 q^0 = a_1 \frac{1-q}{1-q} \Leftrightarrow a_1 = a_1.$$

Pretpostavka. Uvodi se pretpostavka da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$ odnosno:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1-q^k}{1-q}.$$

Korak. Treba dokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1 \in \mathbb{N}$. Polazi se od sume koja sadrži

$k + 1$ element:

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{k-1} + a_1q^k = (pretpostavka) =$$

$$= a_1\frac{1-q^k}{1-q} + a_1q^k = (svođenje\ na\ zajednički\ nazivnik) =$$

$$= a_1\frac{1-q^k+q^k-q^{k+1}}{1-q} = a_1\frac{1-q^{k+1}}{1-q}.$$

Prethodni račun pokazuje da tvrdnja vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$ pa prema principu indukcije ona vrijedi za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. ■

Indukcijom je moguće dokazivati i nejednakosti.

Primjer 8. Metodom matematičke indukcije dokazati da u skupu prirodnih brojeva vrijedi nejednakost:

$$3^n \geq 3n + 1\,, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Dokaz: Baza. Za $n = 2$ dobije se nejednakost $3^2 \geq 3 \cdot 2 + 1$ odnosno $9 \geq 7$, što je istinito.

Pretpostavka. Pretpostavi se da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ odnosno da je $3^k \geq 3k + 1$.

Korak. Koristeći pretpostavku treba dokazati da ista nejednakost vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$. Za $k+1 \in \mathbb{N}$:

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k \geq (pretpostavka) \geq$$

$$\geq 3 \cdot (3k+1) = 9k + 3$$

Ako se dokaže da je

$$9k + 3 \geq 3(k+1) + 1$$

dobiti će se traženu nejednakost

$$3^{k+1} \geq 3(k+1) + 1$$

Očigledno vrijedi niz zaključaka

$$9k + 3 \geq 3(k+1) + 1 \Leftrightarrow 9k + 3 \geq 3k + 4 \Leftrightarrow 6k \geq 1$$

što je istinito za proizvoljni prirodni broj k. Ovim je dokazano da je zadana nejednakost istinita za $k+1 \in \mathbb{N}$ pa je prema principu indukcije istinita i $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. ■

Primjer 9. Dokazati indukcijom da je $n! \geq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

Dokaz: Baza. Provjeri se nejednakost za $n = 4$. Dobije se $4! \geq 2^4$, odnosno $24 \geq 16$ pa je tvrdnja istinita za $n = 4$.

Pretpostavka. Pretpostavi se da zadana nekednakost vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$ odnosno da je $k! \geq 2^k$.

Korak. Dokaže se da je tvrdnja istinita i za $k+1 \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)! = (k+1) \cdot k! \geq (pretpostavka) \geq$$

$$\geq (k+1) \cdot 2^k = k2^k + 2^k.$$

Očito je

$$k \cdot 2^k \geq 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

pa je i

$$k2^k + 2^k \geq 2^{k+1}$$

iz čega se može zaključiti da je

$$(k+1)! \geq 2^{k+1}.$$

Ovim je dokazano da je nejednakost točna za $k+1 \in \mathbb{N}$ pa je prema principu indukcije točna i za $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. ■

Matematičkom indukcijom dokazuju se i tvrdnje vezane uz djeljivosti na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Primjer 10. Dokazati indukcijom da je $5^{2n-1} + 1$ djeljivo sa 6 za svaki prirodni broj $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz: Baza. Za $n = 1$ dobije se izraz $5^{2 \cdot 1 - 1} + 1 = 5 + 1 = 6$ a 6 je djeljivo sa 6 pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka. Pretpostavi se da tvrdnja vrijedi za neko $k \in \mathbb{N}$ odnosno da je $5^{2k-1} + 1$ djeljivo sa 6.

Korak. Dokaže se da tvrdnja vrijedi za $k+1 \in \mathbb{N}$ odnosno da je izraz $5^{2(k+1)-1} + 1 = 5^{2k+1} + 1$ djeljiv s 6.

$$5^{2k+1} + 1 = 5^{2k-1+2} + 1 = 5^{2k-1}5^2 + 1 = 25 \cdot 5^{2k-1} + 1 =$$

$$= \underbrace{24 \cdot 5^{2k-1}}_{\substack{djeljivo\ s\ 6 \\ jer\ je\ faktor\ 24 \\ djeljiv\ s\ 6}} + \underbrace{5^{2k-1} + 1}_{\substack{djeljivo\ s\ 6 \\ po \\ pretpostavci}}.$$

Prema tome, izraz $5^{2k+1} + 1$ je djeljiv s 6 čime je dokazano da tvrdnja vrijedi i za $k+1 \in \mathbb{N}$. Sada primjena principa matematičke indukcije povlači tvrdnju. ■

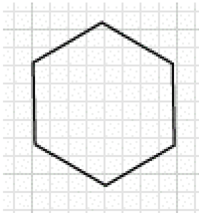
Matematičkom indukcijom moguće je dokazivati i identitete povezane s geometrijom.

Primjer 11. Dokazati da je zbroj svih kutova u n −terokutu jednak $(n-2)\cdot 180^0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Dokaz. Baza. Za $n = 3$ dobije se trokut čiji zbroj svih kuteva iznosi 180^0 a to je prema gornjoj formuli $(3-2)\cdot 180^0 = 180^0$ pa je tvrdnja iz baze točna.

Pretpostavka. Pretpostavi se da je tvrdnja točna za neki k −terokut, odnosno da je suma kuteva proizvoljnog k −terokuta jednaka $(k-2)\cdot 180^0$.

Korak. Dokaže se da tvrdnja vrijedi i za $(k+1)$ −terokut. Potrebno je nacrtati sliku.



Sl.3. $(k+1) - terokut$

Podijeli se $(k+1)$ −terokut na trokut $T_{k+1}T_1T_2$ i k −terokut $T_2T_3 \dots T_{k+1}$ kao na slici. Sa slike se vidi da je suma kutova $(k+1)$ −terokuta jednaka zbroju kuteva trokuta $T_{k+1}T_1T_2$ i kuteva k −terokuta $T_2T_3 \dots T_{k+1}$:

$$\underbrace{\alpha+\beta+\gamma}_{\substack{suma\ kuteva \\ trokuta \\ iznosi\ 180^0}} + \underbrace{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k}_{\substack{suma\ kuteva \\ k-terokuta\ iznosi \\ (k-2)\cdot 180^0\ po\ pretp.}} =$$

$$= 180^0 + (k-2)\cdot 180^0 = (k-1)\cdot 180^0,$$

što je i trebalo dokazati. Sada princip indukcije povlači točnost zadane formule za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. ■

Ova metoda ima i nedostataka, što se najviše odnosi na činjenicu da dokaz indukcijom ne pruža uvid u prirodu tvrdnje koja se dokazuje.

REALNI BROJEVI

Skup prirodnih brojeva može se proširiti do skupa cijelih brojeva koji sadrži negativne brojeve i nulu.

Def. Skup cijelih brojeva sadrži elemente:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Skup $\mathbb{Z}$ zatvoren je u odnosu na algebarske operacije zbrajanja, oduzimanja i množenja. Međutim, kvocijent dva cijela broja ne mora nužno biti cijeli broj. Stoga je skup $\mathbb{Z}$ prirodno proširiti do skupa $\mathbb{Q}$ svih racionalnih brojeva ili razlomaka.

Def. Skup racionalnih brojeva je:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$$

Starogrčki matematičari Pitagorine škole matematike dugo su vremena smatrali da se sve veličine u prirodi međusobno sumjerljive. Oni su temeljili matematiku na pretpostavci da ne postoje brojevi izvan skupa racionalnih brojeva. Ovu tvrdnju prvi je pobio Pitagorin učenik Hipas iz Metaphontuma.

Teorem. Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Dokaz: Pretpostavi se suprotno, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan. To znači da se može zapisati u obliku razlomka:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$$

Bez smanjenja općenitosti smije se pretpostaviti da je taj razlomak do kraja skraćen. Kvadriranje prethodnog izraza daje:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Prema tome, p^2 je paran broj pa je i p paran. Zato je $p = 2k, k \in \mathbb{N}$. Nadalje,

$$p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow (2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$$

Iz prethodne relacije se vidi da je q^2 paran pa je i q paran. Stoga je $q = 2l, l \in \mathbb{Z}$. Prema tome, razlomak

$$\frac{p}{q} = \frac{2k}{2l}$$

nije do kraja skraćen. To je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom. Očito je pretpostavka o racionalnosti broja $\sqrt{2}$ pogrešna. Dakle $\sqrt{2}$ nije racionalan. ■

Brojevi koji nisu racionalni nazivaju se iracionalnim brojevima. Skup svih iracionalnih brojeva označava se s I. Npr.

$$\sqrt{2} \in I$$

Def. Skup svih realnih brojeva označava se s $\mathbb{R}$. Skup $\mathbb{R}$ sadrži sve racionalne i iracionalne brojeve:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

Među najvažnije iracionalne brojeve ubrajaju se brojevi π, Eulerov broj e kao i omjer zlatnog reza ϕ.

Realni brojevi se primjenjuju za označavanje numeričkih vrijednosti dobivenih mjerenjima kao i za zapisivanje različitih konstanti. Svi izračuni koji se provode u svim područjima tehnologije daju kvantitativne vrijednosti koje se predočavaju realnim brojevima.

APSOLUTNA VRIJEDNOST REALNOG BROJA

Apsolutna vrijednost realnog broja je njegova brojčana vrijednost pri čemu se ne uzima u obzir predznak broja. Na primjer $|3.2| = 3.2$ i $|-3.2| = 3.2$.

Def. Za proizvoljan realan broj $a \in \mathbb{R}$ apsolutna vrijednost u oznaci $|a|$ se definira kao:

$$|a| = \begin{cases} a, ako\ je\ a \geq 0 \\ -a, ako\ je\ a < 0 \end{cases}$$

Primjer 1.

$$\underbrace{\left|\frac{7}{5}\right| = \frac{7}{5}}_{jer\ je\ \frac{7}{5} \geq 0} \quad , \quad \underbrace{|-\pi|}_{jer\ je -\pi < 0} = -(-\pi) = \pi \quad , \quad \underbrace{|0|}_{jer\ je\ 0 \geq 0} = 0 \ . \ \blacksquare$$

Primjer 2. Izračunati

(a) $|3-\pi|$ (b) $|\sqrt{2}-2|$ (c) $\left(|2-\sqrt{8}| + |\sqrt{2}-1|\right)/|-3-3\sqrt{2}|$

Rješenje: (a) $3-\pi < 0$ pa je $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$

Slično se riješi (b):

$$\sqrt{2} - 2 < 0$$

pa se prema definiciji apsolutne vrijednosti može pisati

$$|\sqrt{2}-2| = -(\sqrt{2}-2) = 2-\sqrt{2}$$

(c)Izbacivanjem apsolutnih vrijednosti iz zadanog izraza dobije se:

$$\frac{|2-\sqrt{8}| + |\sqrt{2}-1|}{|-3-3\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{8}-2+\sqrt{2}-1}{3+3\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 3}{3 + 3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 3}{3 + 3\sqrt{2}}.$$

Skraćivanje i racionalizacija prethodnog izraza daje:

$$\frac{3\sqrt{2} - 3}{3 + 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} =$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 3 - 2\sqrt{2},$$

što je traženo riješenje zadatka. ■

Poznato je da je kvadratni korijen iz realnog broja pozitivan broj. Zato bi bilo pogrešno korijen iz kvadrata realnog broja računati poništavanjem korijena i kvadrata:

$$\sqrt{a^2} \neq a.$$

Primjer 3. Izračunati $\sqrt{(-3)^2}$.

Rješenje:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Pogrešan račun:

$$\sqrt{(-3)^2} = -3,$$

jer bi rezultat korjenovanja bio negativan. ■

Dakle, za proizvoljan realan broj $a \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

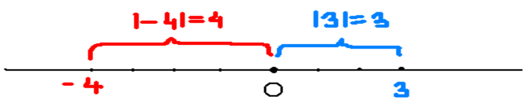
Primjer 4. Izračunati $\sqrt{4 - 4\pi + \pi^2}$.

Rješenje:

$$\sqrt{4 - 4\pi + \pi^2} = \sqrt{(2 - \pi)^2} = |2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2. \quad ■$$

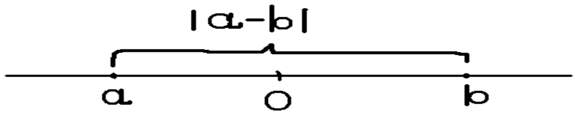
GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA APSOLUTNE VRIJEDNOSTI

$|a|$ predstavlja udaljenost broja a od ishodišta O brojevnog pravca.



Sl. Apsolutna vrijednost realnog broja kao njegova udaljenost od ishodišta

Ako se dva realna broja a i b predoče na brojevnom pravcu tada se njihova međusobna udaljenost računa kao $|a-b|$.



Sl. Udaljenost dva realna broja na brojevnom pravcu

Primjer 5. Kolika je udaljenost između brojeva -21 i -7?

Rješenje: Udaljenost je

$$|-21-(-7)| = |-21+7| = |-14| = 14. \quad \blacksquare$$

OSNOVNA SVOJSTVA APSOLUTNE VRIJEDNOSTI

Funkcija apsolutne vrijednosti ima sljedeća svojstva:

$\sqrt{a^2} = a$	Korijen iz kvadrata je pozitivan
$\lvert a\rvert \geq 0$	Ne-negativnost
$\lvert a\rvert = 0 \Leftrightarrow a = 0$	Pozitivna definitnost
$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	Multiplikativnost
$\lvert -a\rvert = a$	Svojstvo simetrije
$\lvert a+b\rvert \leq \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	Nejednakost trokuta
$\lvert a-b\rvert \geq \big\lvert \lvert a\rvert - \lvert b\rvert \big\rvert$	Inverzna nejednakost trokuta

JEDNADŽBE S APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA

U postupku rješavanja jednadžbi s apsolutnim vrijednostima cilj je izbacivanje apsolutnih vrijednosti, što se najčešće postiže razlikovanjem slučajeva.

Primjer 6. U skupu $\mathbb{R}$ riješiti jednadžbe:

(a) $|2x-3| = 1$
(b) $\big||x|-2\big| = 5$

Rješenje: (a) Ako je apsolutna vrijednost izraza jednaka 1, onda taj izraz može biti jednak 1 ili -1.

$$|2x-3| = 1$$

$$2x-3=-1 \quad \textit{ili} \quad 2x-3=1$$

$$2x=2 \quad \textit{ili} \quad 2x=4$$

$$x_1=1 \quad \textit{ili} \quad x_2=2$$

Skup rješenja je $x \in \{1,2\}$.

(b)

$$\big||x|-2\big|=5$$

$$|x|-2=-5 \quad ili \quad |x|-2=5$$

$$|x|=-3 \quad ili \quad |x|=5$$

$$nema\ rješenja \quad ili \quad x_1=-7\,, x_2=7$$

Rješenje jednadžbe je $x \in \{-7,7\}$. ■

Primjer 8. U skupu ℝ riješiti jednadžbu

$$|x^2+2x|=3.$$

Rješenje: Izraz unutar apsolutnih vrijednosti može poprimiti vrijednost -3 ili 3:

$$|x^2+2x|=3$$

$$x^2+2x=-3 \quad ili \quad x^2+2x=3$$

$$x^2+2x+3=0 \qquad x^2+2x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3}}{2}= \qquad x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\cdot 3}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}= \qquad =\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} \qquad =\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm 4}{2}$$

$$nema\ rješenja\ jer\ je\ pod\ korijenom\ negativan\ broj \qquad x_3=-3\ ,\ x_4=1$$

Rješenja jednadžbe su $x \in \{-3,1\}$. ■

Primjer 9. U skupu ℝ riješiti jednadžbu:

$$6x^2 - 7|x| + 2 = 0.$$

Rješenje: Potrebno je razlikovati dva slučaja.

Slučaj A. Pretpostavi se da je $x \geq 0$. U tom slučaju je $|x| = x$ pa zadana jednadžba ima oblik:

$$6x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} =$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12}$$

$$x_1 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

Za oba korijena je ispunjan uvjet slučaja A jer je $x_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ i $x_2 = \frac{2}{3} \geq 0$ pa oni predstavljaju riješenje zadane jednadžbe.

Slučaj B. Ako se pretpostavi da je $x < 0$ apsolutna vrijednost biti će jednaka $|x| = -x$ pa u okviru ovog slučaja zadana jednadžba ima oblik:

$$6x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} =$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12}$$

$$x_1 = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Oba korijena su manja od nule $x_1 = -\frac{2}{3} < 0, x_2 = -\frac{1}{2} < 0$ pa ispunjavaju uvjet slučaja B te ih se može smatrati riješenjima polazne jednadžbe.

Skup svih riješenja zadane jednadžbe sadrži uniju svih dobivenih riješenja iz slučaja A i slučaja B, odnosno:

$$x \in \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}. \qquad \blacksquare$$

Primjer 10. Riješiti jednadžbu

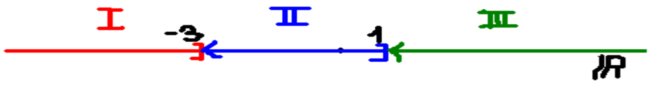
$$|x+3|+|x-1|=1.$$

Rješenje: Prilikom eliminacije apsolutne vrijednosti iz gornje jednadžbe prikladno je razlikovati tri slučaja. Skup realnih brojeva podijeli se obzirom na nul točke:

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

Na taj način dobiju se tri međusobno disjunktna područja, kao na sljedećoj slici:



Sl.4. Disjunktna područja I,II i III

Unutar slučaja (I) promatraju se varijable koje se nalaze u području $-\infty < x \leq -3$, odnosno $x \in \langle -\infty, -3]$. Na tom području je izraz $x+3 \leq 0$ pa je $|x+3| = -x-3$, također je $x+1<0$ pa je $|x-1| = -x+1$. Zato na ovom području naša polazna jednadžba ima oblik:

$$-x-3-x+1=1$$

$$\Rightarrow -2x = 3 \;/:(-2)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Kako se dobiveno riješenje ne nalazi u promatranom području $x = -\frac{5}{2} \notin \langle -\infty, -3]$ ne može se smatrati riješenjem dane jednadžbe.

Slučaj (II) uključuje područje $-3 < x \leq 1$, tj. varijabla x se nalazi u intervalu $x \in \langle -3, 1]$. Na tom intervalu je $x+3>0$ a $x-1 \leq 0$ pa su njihove apsolutne vrijednosti jednake: $|x+3| = x+3, |x-1| = -x+1$. Zato u okviru slučaja (II) naša jednadžba prelazi u jednadžbu:

$$x+3-x+1=1$$

što je ekvivalentno kontradiktornoj relaciji

$$4=1,$$

pa na ovom području jednadžba nema riješenje.

Slučaj (III) je zadan uvjetom $x > 1$, drugim riječima $x \in \langle 1, +\infty \rangle$. Na tom intervalu izrazi u apsolutnim vrijednostima su pozitivni, t.j. $x + 3 > 0$ i $x - 1 > 0$ pa su odgovarajuće apsolutne vrijednosti jednake $|x + 3| = x + 3, |x - 1| = x - 1$. Polazna jednadžba ovdje ima oblik:

$$x + 3 + x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Ovo riješenje se odbacuje jer ne zadovoljava uvjet slučaja (III), tj. $x = -\frac{1}{2} < 1$.

Slučajevi I, II i III nisu dali riješenje. Odavde slijedi zaključak da zadana jednadžba nema riješenja. ■

NEJEDNADŽBE S APSOLUTNIM VRIJEDNOSTIMA

Geometrijsko značenje apsolutne vrijednosti realnog broja $x \in \mathbb{R}$ je udaljenost tog broja od ishodišta.

Promatra se nejednadžba oblika:

$$|x| < b,$$

gdje je $b \geq 0$ pozitivan realan broj. Rješenje gornje nejednadžbe bit će skup svih vrijednosti varijabli x koje su udaljene od ishodišta za manje od b jedinica. Bilo koji broj x koji se na brojevnom pravcu nalazi između brojeva – b i b je udaljen od ishodišta manje od b jedinica.

Zato je nejednadžba

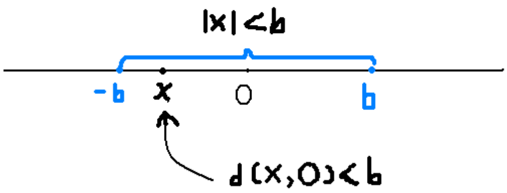
$$|x| < b$$

ekvivalentna relaciji

$$-b < x < b$$

odnosno

$$x \in \langle -b, b \rangle$$



Sl.5. Udaljenost varijable x od ishodišta O je manja od b na intervalu $\langle -b, b\rangle$

Primjer 11. Na skupu $\mathbb{R}$ riješiti sljedeće nejednadžbe:

(a) $|x| < 2.5$ (b) $|x| \leq 2.5$.

Rješenje: (a) Skupu riješenja pripadaju one varijable x koje su udaljene od ishodišta za manje od 2.5:

$$|x| < 2.5 \Leftrightarrow -2.5 < x < 2.5$$

Riješenje je interval $x \in \langle -2.5, 2.5\rangle$.

(b) Riješenje nejednadžbe uključuje i rubove jer je $|-2.5| = |2.5| = 2.5$:

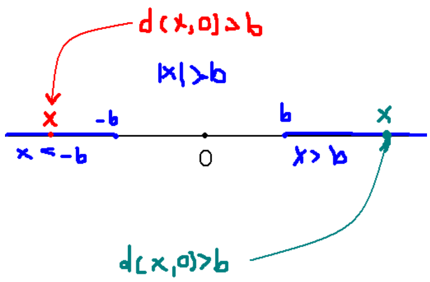
$$|x| \leq 2.5 \Leftrightarrow -2.5 \leq x \leq 2.5,$$

tj. $x \in [-2.5, 2.5]$. ■

Promatra se nejednadžba:

$$|x| > b, b \geq 0$$

Skup riješenja predstavljaju oni brojevi s brojevnog pravca čija je udaljenost od ishodišta veća od b:



Sl.6. Udaljenost varijable x je veća od b ako je $x < -b$ ili $x > b$

Prema tome, nejednadžba oblika

$$|x| > b$$

ekvivalentna je dvjema nejednadžbama:

$$x < -b \quad ili \quad x > b\,.$$

Primjer 12. Riješiti nejednadžbe:

(a) $|x| > 5.1$ (b) $|x| \geq 3.4$

Rješenje: (a) Rješenje prve nejednadžbe čini skup svih točaka čija je udaljenost od ishodišta veća od 5.1:

$$|x| > 5.1$$

$$x < -5.1 \quad ili \quad x > 5.1$$

Riješenje se može zapisati kao unija intervala $x \in \langle -\infty, -5.1\rangle \cup \langle 5.1, +\infty\rangle$.

(b) Riješenje nejednadžbe je $x \in \langle -\infty, -3.1\rangle \cup \langle 3.1, +\infty\rangle$ ■

Primjer 13. Riješiti nejednadžbe

(a) $|3x + 4| \leq 2$ (b) $|1 - 2x| < 3$

Rješenje: (a)

$$-2 \leq 3x + 4 \leq 2$$

$$-6 \leq 3x \leq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq -\frac{2}{3}.$$

Riješenje ove nejednadžbe je segment $x \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right]$.

(b)

$$-3 < 1 - 2x < 3$$

Gornja dvostruka nejednadžba je sastavljena od dvije nejednadžbe:

1. nejednadžba	2. nejednadžba
$-3 < 1 - 2x$	$1 - 2x < 3$
$-2x > -4 \Rightarrow x < 2$	$-2x < 2 \Rightarrow x > -1$
$x \in \langle -\infty, 2\rangle$	$x \in \langle -1, +\infty\rangle$

Rješenje nejednadžbe je presjek rješenja 1. i 2. nejednadžbe a to je interval $x \in \langle -1,2\rangle$. ■

Primjer 15. Riješiti nejednadžbu:

$$\left|\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{4}.$$

Rješenje:

$$\left|\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{2}<-\frac{1}{4} \qquad ili \qquad \frac{x}{3}+\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{3}<-\frac{3}{4} \Rightarrow x<-\frac{9}{4} \qquad \frac{x}{3}>-\frac{1}{4} \Rightarrow x>-\frac{3}{4}$$

$$x \in \langle -\infty, -\frac{9}{4}\rangle \qquad x \in \langle -\frac{3}{4}, +\infty\rangle$$

Riješenje zadatka je unija intervala iz oba slučaja: $x \in \langle -\infty, -\frac{9}{4}\rangle \cup \langle -\frac{3}{4}, +\infty\rangle$. ■

Primjer 16. U skupu $\mathbb{R}$ riješiti nejednadžbu:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1.$$

Rješenje: Zadana nejednadžba je ekvivalentna dvostrukoj nejednadžbi:

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{x-1}{x+1}<1.$$

Najprije se odredi riješenje prve nejednadžbe:

$$-1<\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}>-1.$$

$$\frac{x-1}{x+1}>-1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}+1>0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1+x+1}{x+1}>0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x+1}>0 \Rightarrow \frac{x}{x+1}>0.$$

Racionalni izraz je veći od nula ako su brojnik i nazivnik veći od nula ili su brojnik i nazivnik manji od nule:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\begin{array}{c} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{array}} & & \underline{\begin{array}{c} x < 0 \\ x + 1 < 0 \end{array}} \\ & ili & \\ \underline{\begin{array}{c} x > 0 \\ x > -1 \end{array}} & & \underline{\begin{array}{c} x < 0 \\ x < -1 \end{array}} \\ & & \\ x \in \langle 0, +\infty\rangle & & x \in \langle -\infty, -1\rangle \end{array}$$

Riješenje prve nejednadžbe je unija ova dva intervala

$$x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle.$$

Iz druge nejednadžbe dobije se:

$$\frac{x-1}{x+1} < 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1-x-1}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} < 0$$

Kako je brojnik manji od nule nazivnik mora biti veći od nule:

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

pa je interval $x \in \langle -1, +\infty\rangle$ riješenje druge nejednadžbe.

Obe nejednadžbe moraju biti ispunjene pa je riješenje zadatka presjek riješenja prve i druge nejednadžbe:

$$x \in [\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle] \cap \langle -1, +\infty\rangle$$

odnosno

$$x \in \langle 0, +\infty\rangle \ \blacksquare$$

Primjer 19. Riješiti slijedeću nejednadžbu u $\mathbb{R}$:

$$|x^2 - 2x| \geq x.$$

Rješenje: Potrebno je razlikovati dva slučaja.

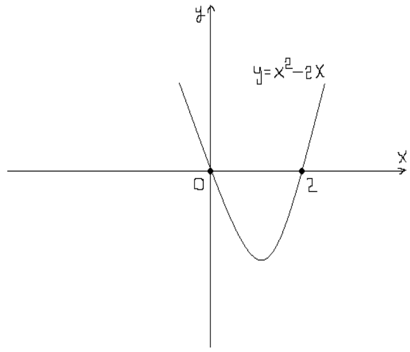
Slučaj A. Promatra se područje na kojem je $x^2 - 2x \geq 0$:

Nul točke kvadratne jednadžbe su:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Približni graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 2x$ je:



Sl.1. Graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 2x$

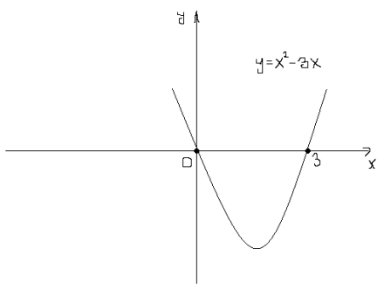
Riješenje kvadratne nejednadžbe $x^2 - 2x \geq 0$ je područje na kojem se graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 2x$ nalazi iznad osi$-x$ a to je unija intervala: $x \in \langle -\infty, 0] \cup [2, +\infty\rangle$. Za te vrijednosti varijable x apsolutna vrijednost je jednaka $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ pa zadana kvadratna nejednadžba ima oblik:

$$x^2 - 2x \geq x$$

odnosno

$$x^2 - 3x \geq 0.$$

Najprije se odrede nul-točke $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$. Na osnovu dobivenih nul-točaka može se skicirati parabola:



Sl.2. Graf kvadratne funkcije $y = x^2 - 3x$

Sa slike 2 može se zaključiti da se traženo riješenje kvadratne nejednadžbe nalazi u intervalu $x \in \langle -\infty, 0] \cup [3, +\infty\rangle$. Dobiveno riješenje se nalazi u okviru slučaja A što znači da se mora nalaziti i u intervalu $\langle -\infty, 0] \cup [2, +\infty\rangle$. To je ispunjeno za sve vrijednosti varijable x iz dobivenog riješenja. Prema tome riješenje slučaja A je: $x \in \langle -\infty, 0] \cup [3, +\infty\rangle$.

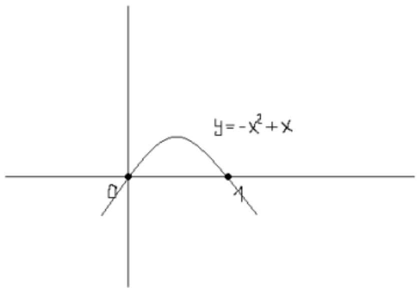
Slučaj B. Nejednadžba se riješava na području $x^2 - 2x < 0$. Sa slike 1 može se zaključiti da je to je interval $\langle 0,2\rangle$. Za te x −eve je $|x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$ pa zadana nejednadžba unutar ovog područja glasi:

$$-x^2 + 2x \geq x$$

odnosno

$$-x^2 + x \geq 0.$$

Da bi se odredilo riješenje ove nejednadžbe potrebno je nacrtati graf kvadratne funkcije $y = -x^2 + x$ (nul točke su $x_1 = 0, x_2 = 1$):



Sl.3. Graf kvadratne funkcije $y = -x^2 + x$

Rješenje nejednadžbe $-x^2 + x \geq 0$ je skup vrijednosti varijable x za koje se graf $y = -x^2 + x$ nalazi iznad osi-x a to je interval $x \in [0,1]$. Presjek dobivenog rješenja i intervala iz uvjeta B daje $x \in [0,1] \cap \langle 0,2\rangle = \langle 0, 1]$.

Riješenje zadatka je unija riješenja iz slučaja A i slučaja B:

$$x \in [\langle -\infty, 0] \cup [3, +\infty\rangle] \cup \langle 0, 1] = \langle -\infty, 1] \cup [3, +\infty\rangle \ \blacksquare$$