

Zadaci za vježbu pred 2. kolokvij, Mat1

1. Nađi limese funkcija:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4} - 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^{2x+7};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 3^x}{2^x + 7};$

2. Odredi točku prekida funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ i učini ga uklonjivim.

3. Odredi parametar $a \in \mathbb{R}$ takav da funkcija f bude neprekidna ako je $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & , x \leq -1 \\ ax^2 + 5x & , x > -1 \end{cases}$.

4. Nađi derivaciju $f'(2)$ po definiciji, ako je $f(x) = 4x^2$.

5. Deriviraj:

a) $y = \cos^5(x^2) + \sin(x^3 + 2x);$

b) $y = \ln x \cos x \sin x;$

c) $y = e^{x^4} \cdot \sin(\ln x);$

d) $y = \frac{\ln 5x}{2x};$

e) $y = \sqrt{\log_5 \operatorname{tg}(3x^2 + 5x)}$;

f) $x^3 + 5y^2 + 7y = 3$;

g) $\frac{3x}{y} = 7x^2 \cdot \ln y$;

h) $y = (\sin x)^{\ln x}$.

6. Odredi $(f^{-1})'(0)$ ako je:

a) $f(x) = \ln x$;

b) $f(x) = \cos\left(\frac{5x+1}{4}\right)$.

7. Odredi $y''(0)$ i $y'''(0)$ ako je $y = \cos(3x)$.

8.* Nađi jednadžbu tangente i normale na krivulju $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$

a) u točki krivulje $T(0, 4)$;

b) u točki izvan krivulje $T(0, 2)$.

9.* Nađi jednadžbu tangente na krivulju zadanu implicitnom jednadžbom $2x + y^2 + y = 6$, ako je:

a) tangenta paralelna s pravcem $y = 2x + 1$;

b) tangenta okomita na pravac $y = 2x + 1$;

c) točka dirališta $D(0, y)$.

* zadaci pod a), b) i c) su odvojeni zadaci ali zadani s istom funkcijom $f(x)$.

10. Odredi intervale monotonosti i točke ekstrema ako postoje, ako je:

a) $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + 6$;

b) $f(x) = 3e^{x^2+2x}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

11. Odredi intervale zakrivljenosti i točke infleksije ako postoje, ako je:

- a) $f(x) = \frac{1}{x+5}$;
 b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$;
 c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

12. Broj 16 prikaži u obliku umnoška dvaju brojeva kojima je razlika kvadrata maksimalna.

13. Odredi dimenzije kutije kojoj je baza kvadrat, tako da ima volumen 2 dm^3 , a da se pritom iskoristi minimalna količina kartona za njenu izradu.

RJEŠENJA

1. a) $\frac{\sqrt{3}}{36}$; b) 12; c) e^8 ; d) $\frac{5}{7}$.
 2. $f(5) := 10$; 3. $a = 8$; 4. 16;
 5. a) $y' = -10 \cos^4 x^2 \cdot \sin x^2 + (2 + 3x^2) \cos(x^3 + 2x)$; b) $\frac{\sin 2x}{2x} + \cos 2x \ln x$;
 c) $e^{x^4}(4x^3 \sin(\ln x) + x^{-1} \cos(\ln x))$; d) $\frac{1 - \ln 5x}{2x^2}$;
 e) $\frac{6x+5}{2\sqrt{\log_5 \operatorname{tg}(3x^2+5x)} \cdot \operatorname{tg}(3x^2+5x) \ln 5 \cdot \cos^2(3x^2+5x)}$; f) $\frac{3(1-x^2)}{10y+7}$; g) $\frac{3y-14xy^2 \ln y}{7x^2y+3x}$;
 h) $(\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \frac{\ln x \cos x}{\sin x}\right)$.
 6. a) 1; b) $-4/5$. 7. $-9 \cos 3$ i 0.
 8. a) $y = -6x + 4$ tangenta; b) tangente: $y = -2x + 2$ i $y = -10x + 2$.
 9. a) $y = 2x - 7$; b) $y = -1/2 \cdot x + 33/16$; c) $y = -\frac{2}{5}x - 3$ i $y = -\frac{2}{5}x + 2$.
 10. a) ekstremi su za $x = 0$ i $x = \pm 1$; b) ekstrem za $x = -1$; c) svugdje pada, nema ekstrema.
 11. a) pada svuda, za $x < -5$ konvexna, za $x > -5$ konkavna; b) $T_{infl} = (0, 0)$; c) $T_{infl} = (\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$.
 12. Rastav je 4 i 4, te -4 i -4 . 13. $a = b = \sqrt[3]{2}$.