Vjerojatnost i statistika

1. kolokvij

8.12.2011.

Zadaci:

1. (a) Biramo tri proizvoda iz kutije koja sadrži 20 proizvoda, od kojih su 4 neispravna. Odredite vjerojatnost da (i) niti jedan izabrani proizvod nije neispravan; (ii) da je točno jedan izabrani proizvod neispravan; (iii) da je barem jedan izabrani proizvod neispravan.

(b) Student i dvije studentice nastupaju na šahovskom turniru. Obje studentice igraju podjednako. Međutim, studentice igraju dva puta bolje od studenta. Kolika je vjerojatnost da turnir osvoji jedna od studentica?

2. Vjerojatnost da padne pismo kod bacanja nesimetričnog novčića iznosi $P(P) = 3/5$ dok je vjerojatnost da padne glava jednaka $P(G) = 2/5$. Ako padne pismo tada na slučajan način biramo broj od 1 do 5; a ukoliko padne glava na slučajan način biramo broj od 1 do 3. (i) Odredite vjerojatnost da je izabran paran broj. (ii) Kolika je vjerojatnost da je pala glava ako je poznato da je izabran paran broj?

3. Dva maskirana razbojnika nastoje opljačkati banku punu klijenata ali zaštitar pokrene alarm koji zatvara ulazna vrata. Kad su lopovi shvatili da im je pljačka propala, odbace svoje maske i izgube se među klijentima. Policija je uhitila sve osobe koje su se zatekle u banci, među kojima su bila i dva lopova. Suočivši se s 40 ljudi koji su tvrdili da su nevini, policija ih je odlučila ispitati detektorom laži. Pretpostavka je da detektor laži prepozna da lopov laže je 0.85 ali se i nedužna osoba može na detektoru označiti kao lažljivac s vjerojatnosti 0.08. Kolika je vjerojatnost da je gospodin Smit lopov, ako je detektor ustanovio da laže?

4. Neka tvornica proizvodi 0.3 posto škartova. Koliki je očekivani broj škartova u uzorku od 1000 proizvoda? Kolika je vjerojatnost da se u tom uzorku ne nalazi niti jedan škart? Kolika je vjerojatnost da se u uzorku nalaze barem 2 škarta?

5. Broj golova koje Manchester UTD postigne u utakmici distribuiran je prema Poissonovoj slučajnoj varijabli. Ako statistika pokazuje da je Manchester UTD postigao 31 gol u 14 utakmica, kolika je vjerojatnost da u slijedećoj (proizvoljnoj) utakmici postigne barem 2 gola? Kolika je vjerojatnost da u slijedeće dvije (proizvoljne) utakmice ne zabije niti jedan gol?

Rješenja:

(a)

U kutiji se nalazi 16 ispravnih i 4 neispravna proizvoda.

(i) Broj povoljnih ishoda iznosi $\binom{16}{3}$, jer sva 3 proizvoda izabiremo iz skupa od 16 ispravnih proizvoda. Broj svih mogućih ishoda je $\binom{20}{3}$. Tražena vjerojatnost je:

$$p = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{16!}{3!\,13!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} = \frac{16!\,17!}{13!\,20!} =$$

$$= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18} = 0.49122$$

(ii) Izračunajmo broj povoljnih ishoda. Biraju se 3 proizvoda od kojih su 2 ispravna dok je 1 neispravan. To se može napraviti na $\binom{16}{2}\binom{4}{1}$ načina, pa vjerojatnost iznosi:

$$p = \frac{\binom{16}{2}\binom{4}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{16!}{2!\,14!} \cdot \frac{4!}{1!\,3!}}{\frac{20!}{3!\,17!}} =$$

$$= 0.42105$$

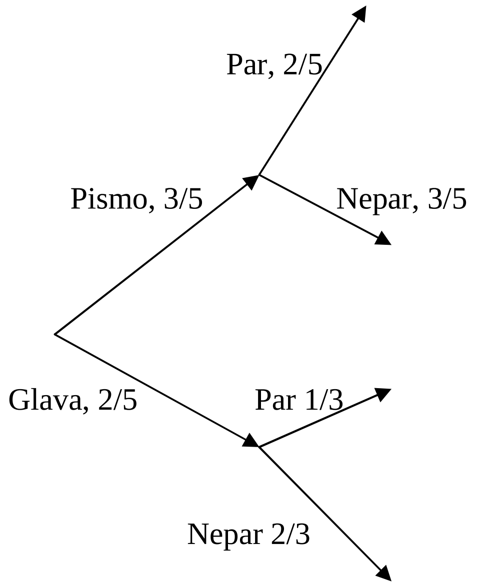
(iii) Događaj da je barem jedan proizvod neispravan je komplementaran događaju da su svi izabrani proizvodi ispravni:

$$p = 1 - \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} =$$

$$= 1 - 0.49122 = 0.50878$$

(b) Označimo vjerojatnosti na slijedeći način. Vjerojatnost da student pobijedi na turniru s p_1, prva studentica s p_2, a druga s p_3. Studentice igraju podjednako pa je $p_2 = p_3$ i duplo bolje od studenta $p_2 = p_3 = 2p_1$. Kako je $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ to je $p_1 + 2p_1 + 2p_1 = 1$. Dakle, vjerojatnost pobjede studenta je $p_1 = 1/5$. Vjerojatnost da pobijedi jedna od studentica iznosi $p = 4/5$.

2. Nacrtajmo odgovarajući dijagram.



(i) Vjerojatnost da je izabran paran broj iznosi:

$$P(Paran) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{75} = 0.37333$$

(ii) Izračunajmo uvjetnu vjerojatnost:

$$P(Glava|Paran) = \frac{P(Glava \ \cap Paran)}{P(Paran)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{28}{75}} = \frac{5}{14} = 0.35714$$

3. Definirajmo hipoteze na slijedeći način:

$$H_1 \ldots Smit\ je\ lopov$$

$$H_2 \ldots Smit\ nije\ lopov$$

Vjerojatnosti hipoteza iznose: $P(H_1) = 2/40$ i $P(H_2) = 38/40$.

Označimo događaj

$$A \ldots detektor\ je\ ustanovio\ da\ ispitana\ osoba\ laže$$

Prema uvjetima zadatka

$$P(A|H_1) = 0.85$$

$$P(A|H_2) = 0.08$$

Traženu vjerojatnost izračunamo koristeći Bayesovu formulu:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{40} \cdot 0.85}{\frac{2}{40} \cdot 0.85 + \frac{38}{40} \cdot 0.08} = 0.35865$$

4. Definirajmo slučajnu varijablu X koja daje broj škartova u zadanom uzorku. Ova slučajna varijabla je binomna s parametrima $n = 1000$ i $p = 0.003$:

$$X \sim B(0.003, 1000)$$

Očekivani broj škartova u iznosi:

$$EX = np = 0.003 \cdot 1000 = 3$$

Obzirom da je $n = 1000$ velik, binomnu distribuciju možemo aproksimirati Poissonovom s parametrom $\lambda = EX = 3$. Vjerojatnost da se u uzorku nalaze barem dva škarta računamo sada po Poissonovoj distribuciji:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} - \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} = 1 - 4 \cdot e^{-3} =$$

$$= 0.8008$$

5. Intenzitet golova po utakmici je

$$\lambda = \frac{31}{14} = 2.2143$$

Slučajna varijabla koja broji golove po utakmici je distribuirana kao Poissonova s parametrom $\lambda = \frac{31}{14} = 2.2143$, tj. $X \sim P\left(\frac{31}{14}\right)$. Vjerojatnost barem dva gola u utakmici je:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{31}{14}\right)^0}{0!} \cdot e^{-\frac{31}{14}} - \frac{\left(\frac{31}{14}\right)^1}{1!} \cdot e^{-\frac{31}{14}} = 1 - \frac{45}{14} \cdot e^{-\frac{31}{14}} =$$

$$= 0.648898$$

Ako promatramo broj golova na dvije utakmice, prirodno je pretpostaviti da je slučajna varijabla Y koja mjeri taj slučajan događaj Poissonova, dvostruko većeg intenziteta od λ: $\lambda_1 = 2\lambda = \frac{31}{7} = 4.42857$ golova po dvije utakmice. Dakle, $Y \sim P\left(\frac{31}{7}\right)$.

Preostalo je izračunati vjerojatnost da u dvije utakmice ne padne niti jedan gol

$$P(Y = 0) = \frac{\left(\frac{31}{7}\right)^0}{0!} \cdot e^{-\frac{31}{7}} = e^{-\frac{31}{7}} = 0.0119315$$

■