UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

SADRŽAJ

Matematička ili moderna logika je dio logike koja proučava osnovne principe matematičkog zaključivanja. Simbolika matematičke logike koristi se prilikom zapisivanja matematičkih definicija i tvrdnji koje se nazivaju teoremi i propozicije. Logička simbolika predstavljaja univerzalan jezik kojim se koristi matematika. Stoga je potrebno njegovo poznavanje da bi mogli čitati matematički sadržaji, pa tako i ovaj nastavni materijal.

Ponekad se u logici pojavljuju paradoksi.

Primjer 1. Jedan od najpoznatijih paradoksa je sadržan u Epimenidovoj (6. st. pr. Kr.) priči o lažljivcu: ”Kada Korinćanin kaže da svi Korinćani lažu, da li govori istinu?” Među paradokse o lažljivcu možemo ubrojiti i rečenicu “Ja lažem sada .” Da li je ta rečenica istinita ili lažna?

■

SUD ILI IZJAVA

Def. *Sud ili izjava* je rečenica kojoj se može pripisati istinitosna vrijednost tj. moguće je odrediti je li ta rečenica istinita ili lažna.

U nastavku je navedeno nekoliko primjera rečenica koje predstavljaju istinite i neistinite sudove.

Primjer 1. „$1 > 0$“, „2 je paran broj“, „$\sqrt{2}$ je iracionalan broj“ su istiniti sudovi, „3 je paran broj“ , „$0 > 1$“ , „$1 + 2 = 5$“ su neistiniti sudovi. ■

Proizvoljna rečenica nije nužno i sud.

Primjer 2. Rečenica „$x = 1$" nije ni istinita ni lažna, pa ne predstavlja sud. Rečenica „Kolika je suma prvih n prirodnih brojeva?" je pitanje a ne sud. ■

U matematčkoj logici sudovi se zapisuju velikim slovima poput $A, B, C, \dots X, Y$ dok funkcija $v(A)$ označava istinitosnu vrijednost suda A. Ako je sud A istinit tada je $v(A) = 1$, a ako je sud A lažan onda je $v(A) = 0$. Ponekad se umijesto 0 i 1 koriste oznake $\top$ ili $\perp$.

LOGIČKE OPERACIJE SA SUDOVIMA

Postoji više vrsta sudova obzirom na njihovu složenost. Sud "Hrvatska je osvojila Svjetsko prvenstvo u vaterpolu 2010" se razlikuje od suda "Kornjače su gmazovi i hrane se biljkama". Prvi sud je jednostavan sud a drugi sud je složen od dva različita jednostavna suda. Sudovi koji su složeni od dvaju ili više različitih sudova su međusobno povezani logičkim operacijama.

Osnovne logičke operacije sa sudovima su konjukcija (logički i) i disjunkcija (logički ili) ali i negacija, implikacija i ekvivalencija.

Tablica istinitosti je tablica kojom se prikazuju vrijednosti logičkih izraza za svaku moguću kombinaciju zadanih logičkih vrijednosti svih ulaznih varijabli. U praksi, tablica istinitosti sastoji se od jednog stupca za svaku vrijednost ulazne varijable (na primjer, A i B), i jednog završnog stupca za sve moguće rezultate logičke operacije koje se prikazuju tablično.

Logičke operacije mogu se definirati tablicama istinitosti.

Def. Negacija suda A je sud $\neg A$ (čita se „ne A") . Sud $\neg A$ je istinit ako je sud A lažan. Sud $\neg A$ je lažan ako je sud A istinit.

A	¬A
1	0
0	1

Sl. Tablica istinitosti negacije suda A

Primjer 1. Negacija suda „Zagreb je u Hrvatskoj“ je sud „Zagreb nije u Hrvatskoj“, negacija „$2 + 5 = 7$“ je sud „$2 + 5 \neq 7$“. ■

Negacija negacije suda jednaka polaznom sudu:

$$\neg(\neg A) = A.$$

Def. Konjukcija sudova A i B je sud $A \wedge B$ (čita se $A\ i\ B$). Sud $A \wedge B$ je istinit ako i samo ako su i sud A i sud B istiniti.

A	B	A∧B
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Sl. Tablica istinitosti logičke operacije $A \wedge B$

Primjer 2. Neka je sud A „Na Lotu 7/39 je izvučen paran broj“, a sud B „Izvučeni broj na lotu je djeljiv s 3“. Tada je $A \wedge B$ „Izvučen je paran broj djeljiv s 3“ , što znači da je taj sud istinit ako je izvučen jedan od brojeva $6, 12, 18,\ 24,\ 30,\ 36$. ■

Def. Disjunkcija sudova $A\ ili\ B$ je sud $A \vee$ B (čita se $A\ ili\ B$). Sud $A \vee$ B je istinit ako i samo ako je barem jedan od sudova A ili B istinit.

A	B	A∨B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

Sl. Tablica istinitosti logičke operacije $A \vee B$

Primjer 3. Za sudove A „Jučer je u Zagrebu padala kiša“ i B „Jučer je u Zagrebu padao snijeg“ je sud $A \vee B$ istinit ako je jučer padala kiša ili snijeg, a neistinit ako nije padala kiša niti je padao snijeg. Na primjer sud $A \vee B$ biti će neistinit ako je jučer u Zagrebu sijalo Sunce. ■

Primjer 4. Sud P je "Ana je lijepa" a sud Q "Ana je bogata" . Zapisati slijedeće izjave simbolikom matematičke logike:

(a) Ana je lijepa i bogata.
(b) Ana je lijepa i nije bogata.
(c) Ana nije ni lijepa ni bogata.
(d) Nije točno da je Ana lijepa i bogata.
(e) Nije točno da Ana nije lijepa i da nije bogata.

Rješenje: (a) $P \wedge Q$ (b) $P \wedge \neg Q$ (c) $\neg P \wedge \neg Q$ (d) $\neg(P \wedge Q)$ (e) $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$. ■

Def. Implikacija $A \Rightarrow$ B (čita se „A implicira B“, „A povlači B“, „Ako je A onda je B“,“A je dovoljan uvjet za B“, „Bje nužan uvjet za A“ je logička operacija koja je lažna samo u jednom slučaju i to kad je prvi sud istinit a drugi lažan.

A	B	A⇒B
0	0	1
1	0	0
0	1	1
1	1	1

Sl. Tablica istinitosti implikacije

Obzirom da laž povlači istinu može se zaključiti da u svakoj laži ima i nešto istine.

Def. Ekvivalencija $A \Leftrightarrow B$(čita se „A je ekvivalentno s B“, „A je ako i samo ako je B“, „A je nužan i dovoljan uvjet za B“) je istinita ako su oba suda istinita ili ako su oba suda lažna.

A	B	A⇔B
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Sl. Tablica istinitosti relacije ekvivalencije

FORMULE ALGEBRE SUDOVA

Formule algebre sudova su konačni izrazi koji se zapisuju pomoću operacija $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, konstanti 0 ili 1 i zagrada. Uloga zagrada je naglašavanje redosljeda logičkih operacija . također, uveden je dogovor da se najveći prioritet pridruži negaciji, zatim disjunkciji i konjukciji (istog prioriteta) i na kraju implikaciji i ekvivalenciji (istog prioriteta).

Dvije formule su *jednakovrijedne ili logički ekvivalentne* ako za svaku kombinaciju istinitosnih vrijednosti njihovih varijabli sudovi imaju jednaku vrijednost. Te formule se provjeravaju pomoću tablice istinitosti. Logička ekvivalencija zapisuje se kao $P \equiv Q$ i čita P je logički ekvivalentno s Q.

U matematici se često koriste *De Morganove formule*

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \; negacija\ konjukcije$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \; negacija\ disjunkcije.$$

Primjer 1. Neka je sud A „Nogometni klub Chelsea je pobijedio Barcelonu“ a sud B „Cibona je pobijedila Zadar u košarci“. Provjeriti De'Morganove formule za ove sudove.

Rješenje: Sud $A \wedge B$ je istinit ako su pobijedili i Chelsea i Cibona. Negacija suda $A \wedge B$ biti će istinita ako barem jedna od momčadi Chelsea ili Cibone nije dobila utakmicu. Preciznije, ili Chelsea nije pobijedila Barcelonu ili Cibona nije pobijedila Zadar. Iz ovog primjera je očito da vrijedi prva De'Morganova formula .

Sud $A \vee B$ predstavlja situaciju u kojoj je pobijedila barem jedna od momčadi Chelsea ili Cibone. Negacija tog suda biti će istinita ako nije pobijedila niti jedna od ove dvije momčadi. To znači da niti je pobijedila Cibona niti je pobijedila Chelsea. I druga De'Morganova formula je očigledna. ■

Primjer 2. Dokazati De'Morganove formule pomoću tablice istinitosti.

Rješenje:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Uočimo da su stupci istinitosnih vrijednosti relacija $\neg(A \wedge B)$ i $\neg A \vee \neg B$ identični pa vrijedi prvi De'Morganov zakon . Na sličan način može se provjeriti i drugi zakon . ■

Primjer 3. Negirati sljedeće sudove pomoću De'Morganovih pravila:

(a) „Pada kiša i hladno je"
(b) „Naučiti ću lekciju ili ću prepisivati"
(c) „Večerati ću ribu ili meso".

Rješenje: (a) Uvode se oznake za sudove A "pada kiša" , B "hladno je". Prema De'Morganovom pravilu $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ pa negacija zadanog suda ima oblik „Ne pada kiša ili nije hladno ".

(b) Prema drugom De'Morganovom pravilu negacija je „Neću naučiti lekciju i neću prepisivati".

(c) „Neću večerati ribu ni meso ". ■

U algebri sudova vrijede raznovrsni zakoni i identiteti:

Zakoni algebre sudova

Zakoni komutativnosti	(a) $A \vee B \equiv B \vee A$ (b) $A \wedge B \equiv B \wedge A$
Zakoni asocijativnosti	(a) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
	(b) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Zakoni distributivnosti	(a) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
	(b) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Zakoni komplementarnosti	(a) $A \vee \neg A \equiv 1$ (b) $A \wedge \neg A \equiv 0$
	(b) $\neg(\neg A) \equiv A$
De'Morganovi zakoni	(a) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
	(c) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

PREDIKATI I KVANTIFIKATORI

Def. Predikat na univerzalnom skupu S u oznaci $P(x)$ je funkcija koja prelazi u izjavu ako se umjesto varijable x uvrste elementi iz skupa S.

Primjer 1. Neka je $S = \mathbb{R}$. Sljedeće rečenice su predikati na S: „ x je paran broj “, „ $x > 5$ “. Ako u navedene rečenice uvrstimo neki određeni $x \in \mathbb{R}$ primjerice $x = 17$ dobivamo sudove „ 17 je paran broj “ i sud „ $17 > 5$ “. ■

Predikati mogu imati više varijabli.

Primjer 2. Ako skup S sačinjavaju svi ljudi na Zemlji tada je $P(x, y) =$“ osoba x je mlađa od osobe x“ predikat na skupu S. $P(Mate, Marko)$ je sud jer je zasigurno jedan od njih dvojice rođen prije drugog. ■

Primjer 3. Neka je univerzalni skup skup svih ljudi na Zemlji. Promatramo predikate „x je predsjednik Hrvatske“ i „x voli y“. Ako zamijenimo varijablu x s *Romeom* a y s *Julijom* prethodni predikati postaju sudovi, od kojih je prvi lažan a drugi istinit. ■

Jedan od načina na koji predikati postaju sudovi je uvrštavanje konkretnih vrijednosti umjesto varijabli koje se javljaju u predikatu. Drugi način da se predikat pretvori u sud može se ostvariti korištenjem kvantifikatora „za svaki“ i „postoji“.

Sudovi „za svaki x je $P(x)$ i „postoji x takav da je $P(x)$“ zapisuju se kao

$$(\forall x)P(x) \text{ i } (\exists x)P(x)$$

pri čemu se znak $\forall$ čita „za svaki“ i naziva univerzalnim kvantifikatorom a znak $\exists$ čita kao „postoji“ i naziva egzistencijalni kvantifikator.

Primjer 4. Neka je univerzalan skup S zadan kao skup svih ljudi na Zemlji. Tada sud $\forall x(Bog\ voli\ x)$ ima značenje da „Bog voli Romea“, „Bog voli Juliju“, ... gdje se lista vrijednosti varijable x proteže na sva ljudska bića. ■

Primjer 5. Neka je skup S zadan kao skup svih studenata grafičke tehnologije. Tada sud $\exists x(x\ ima\ izvrstan\ iz\ matematike)$ znači da je „Luka ima izvrstan iz matematike“ ili „Toni ima izvrstan iz matematike“ ili ... Gornji sud je istinit ako postoji barem jedan student koji je dobio izvrsnu ocjenu iz matematike a neistinit ukoliko niti jedan student nije polučio peticu na ispitu. ■

Primjer 6. Jesu li sljedeći sudovi istiniti ili lažni:

(a) $\exists x(x = -2)$
(b) $\forall x(x^2 = 5x)$
(c) $\forall x(x\ je\ nogometaš)$
(d) $\exists x \forall y(x\ je\ jači\ od\ y)$

Rješenje: (a) istinit (b) lažan (c) lažan (d) istinit. ■

Primjer 7. Jesu li su slijedeći sudovi identični:

(a) $\forall y \exists x(x < y)$ (b) $\exists x \forall y(x < y)$

Rješenje: Prvi sud je istinit a drugi lažan. Za svaki realni broj y postoji neki x koji je manji od njega, što je očito istinito. Drugi sud tvrdi da postoji x koji je manji od svakog realnog broja y, što je lažno. Dovoljno je y zamjeniti s $y = x - 1$. ■

Negacija kvantifikatora se provodi na slijedeći način:

Negacija kvantifikatora $\forall$:

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\big(\neg P(x)\big)$$

Negacija kvantifikatora $\exists$:

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\big(\neg P(x)\big)$$